

### 9. cvičení - Rekurentně zadané posloupnosti

Spočtěte následující limity:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \text{ kde } a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n} \text{ a } a_1 = 10, \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \text{ kde } a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right) \text{ a } a_1 > 0,$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}), \quad 5. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}).$$

6. Necht' jsou posloupnosti  $x_n$  a  $y_n$  divergentní. Je možné říci, že posloupnosti  $x_n + y_n$  nebo  $x_n y_n$  jsou také divergentní?

7. Necht'  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = 0$ . Je možné říci, že platí buď  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  nebo  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ ?

8\*. Necht'  $a_1 < a_2$  jsou zadané a  $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$ ,  $n \geq 3$ , je rekurentně zadaná. Ukažte, že existuje limita a spočtěte ji.

9\*. Dokažte, že existuje limita  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$ .