

8. cvičení - Trošku těžší příklady

Spočtěte následující limity:

$$\begin{aligned}
 & 1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n^2 + n)}{\log(n^3 - 1)}, \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n^2 + 3^n)}{\log(1 + n + e^{2n})}, \\
 & 3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sin^2 n} - \sqrt{n - \cos^2 n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}, \quad 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} - \sqrt{3^n + 2^n}}, \\
 & 5. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}, \quad 6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).
 \end{aligned}$$

7. Dokažte, že

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

8. Necht' $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in (0, \infty)$. Dokažte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.

9*. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Dokažte, že platí

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$