3. cvičení - Supremum a infimum

Dokažte: Je-li $M \subset \mathbf{R}$, $M \neq \emptyset$, $s \in \mathbf{R}$ a pro každé $x \in M$ platí $x \leq s$, je $\sup M \leq s$.

Nalezněte suprema a infima následujících množin

$$M_1 = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{n}, \quad M_2 = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad M_3 = [0, 1),$$
$$M_4 = \{2^{-n},\ n \in \mathbf{N}\}, \quad M_5 = \Big\{\frac{p}{p+q},\ p, q \in \mathbf{N}\Big\}$$

Dokažte: Je-li $B \subset A \subset \mathbf{R}$, $A, B \neq \emptyset$, A shora omezená, je $\sup B \leq \sup A$.

Příklad na zamyšlení: Mějme zadané množiny $A, B \subset \mathbf{R}$, pro které existují $s_A = \sup A$, $i_A = \inf A$, $s_B = \sup B$ a $i_B = \inf B$. Co můžete obecně říci o supremu S a infimu I množin $A \cup B$, $A \cap B$, $A + B = \{a + b,\ a \in A, b \in B\}$ a $A \setminus B = \{a \in A,\ a \notin B\}$?

Další teoretický příklad: Nechť M je neprázdná množina a $f\colon M \to \mathbf{R}$ a $g\colon M \to \mathbf{R}$ jsou funkce. Dokažte:

Jsou-li f a g shora omezené, potom $\sup(f+g)(M) \leq \sup f(M) + \sup g(M)$.

Jsou-li f a g zdola omezené, potom $\inf(f+g)(M) \geq \inf f(M) + \inf g(M)$.

Mohou být tyto nerovnosti neostré?