2. cvičení - Metody důkazů

1. *Dokažte:* Pro všechna $x, y \in \mathbf{R}$ platí : a) $|x+y| \leq |x|+|y|$, b) $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

2. *Dokažte, že* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *je iracionální.*

Operace s množinami
3. Nechť f je zobrazení z X do Y a $A, B \subset Y$. Dokažte, že

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \text{ a } f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B).$$

4. Mějme 3 množiny A, B a X. Dokažte

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \text{ a } X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B).$$

5. Nechť f je zobrazení z X do Y a $A, B \subset X$. Rozhodněte, zda platí

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \text{ a } f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B).$$

7. *Dokažte binomickou větu, tj. dokažte, že pro každé* $n \in \mathbf{N}$ *a pro každá* $a, b \in \mathbf{R}$ *platí*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Matematická indukce, využije se vztahu $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

8. *Pro libovolné* $n \in \mathbf{N}$ *a* $x \in \mathbf{R}$ *sečtěte výraz* $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$.

Lze použít Moivreovu větu a vzorec pro součet geometrické řady. Dostaneme 0 pro $x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$, pro ostatní x máme výsledek

$$\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Lze to dokázat i indukcí.

A něco trochu netriviálního na závěr
9*. Dokažte, že pro všechna $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ platí

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\ .$$

Návody: 1. Dokazujte matematickou indukcí 1. krok pro $n = 1$. 2. krok z tvrzení pro n plyne tvrzení pro $2n$. 3. krok z tvrzení pro n plyne tvrzení pro $n-1$. Hint - zkuste volit $x_n = \sqrt[n-1]{x_1 \cdots x_{n-1}}$.