17. cvičení — Trochu těžší příklady

Spočtěte následující limity:

$$1.\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3}-\sqrt{n^4+1}}\right)^n \quad 2.\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(x^2+e^x)}{\log(x^4+e^{2x})},$$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\tan x}, \quad 4.\ \lim_{n\to\infty}\sin\bigl(2\pi\sqrt{n^2+1}\bigr), \quad 5.\ \lim_{x\to 1}\bigl(1+\sin(\pi x)\bigr)^{\operatorname{cotan}(\pi x)}$$

$$6.\ \lim_{x\to\infty} x\Bigl(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}\Bigr), \quad 7.\ \lim_{x\to 0+} x\log x.$$

8. Nechť $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a pro každé $y\in\mathbb{R}$ je $\lim_{x\to y} f(x)=0$. Rozhodněte zda platí následující tvrzení

(1) $f(\mathbb{R})=\{0\}$
(2) f je spojitá v $\mathbb{R}$
(3) f je omezená v $\mathbb{R}$
(4) f je omezená na každém omezeném intervalu $I\subset\mathbb{R}$

9. Nechť $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a pro každé $y\in\mathbb{R}$ je $\lim_{x\to y} f(x)=0$. Potom je množina $\{x\in\mathbb{R}; f(x)\neq 0\}$ spočetná. Dokažte.

10. Pro danou spočetnou množinu $M\subset\mathbb{R}$ sestrojte funkci $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takovou, že f je nespojitá právě v bodech množiny M a pro každé $y\in\mathbb{R}$ je $\lim_{x\to y} f(x)=0$.