Zápočtová písemka 9.11.2023

1. (8 bodů) Nalezněte infimum množiny

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi + \sqrt{n}} \right\}.$$

Nezapomeňte podrobně dokázat obě vlastnosti infima.

2. (8 bodů) Spočtěte následující limitu

$$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n^6 - n^3 + 1} - \sqrt{n^6 + n^3 + (-1)^n}).$$

3. (8 bodů) Spočtěte následující limitu

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - \sqrt[n]{n} + (3n-5)n!}{3^n + (n+1)! + n^3}.$$

4. (8 bodů) Spočtěte následující limitu

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt[3]{3^n + 2 \cdot 2^n}}.$$

5. (8 bodů) Rozhodněte o pravdivosti následujících implikací ([x] značí celou část $x \in \mathbb{R}$):

A) Existuje vlastní $\lim_{n\to+\infty}[a_n] \implies$ Existuje vlastní $\lim_{n\to+\infty}[a_n^2]$.
B) Existuje vlastní $\lim_{n\to+\infty}[a_n^2] \implies$ Existuje vlastní $\lim_{n\to+\infty}[a_n]$.
C) Existuje vlastní $\lim_{n\to+\infty}[a_n^2]$ a $a_n > 0 \implies$ Existuje vlastní $\lim_{n\to+\infty}[a_n]$.

Podmínkou udělení zápočtu je získání 20 bodů. Přeji Vám mnoho štěstí.

Zápočtová písemka 9. 11. 2023

1) $M=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\pi+\sqrt{n}}\right\}$ Hledáme $\inf M$.

$\forall n\in\mathbb{N}: \frac{1}{\pi+\sqrt{n}}\geq 0 \Rightarrow$ Hypotéza: $\inf M = 0$

a) Jedná se o dolní odhad, viz výše.

b) Dokažme $\forall s>0,\ \exists x\in M: x<s$.

Řešíme nerovnici: $\frac{1}{\pi+\sqrt{n}}<s,\ 1<\pi s+s\sqrt{n},\ s\sqrt{n}>1-\pi s$

$\sqrt{n}>\frac{1-\pi s}{s},\ n>\left(\frac{1-\pi s}{s}\right)^2$ (protože $n\in\mathbb{N}$)

Fixujme $s>0$, z Archimedovy vlastnosti ex. $n\in\mathbb{N}$

$n>\left(\frac{1-\pi s}{s}\right)^2$, pak platí $\frac{1}{\pi+\sqrt{n}}<s$ a stačí tedy volit

$x=\frac{1}{\pi+\sqrt{n}}$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^6-n^3+1}-\sqrt{n^6+n^3+(-1)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n^6}-n^3+1-(\cancel{n^6}+n^3+(-1)^n)}{\sqrt{n^6-n^3+1}+\sqrt{n^6+n^3+(-1)^n}}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n^3}\left(-2+\frac{1}{n^3}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right)}{\cancel{n^3}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^6}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}+\frac{(-1)^n}{n^6}}\right)}=-1.$

Využijeme známé limity a $\{(-1)^n\}$ je omezená, $\frac{1}{n^6}\xrightarrow{n\to+\infty}0$, tedy $\frac{(-1)^n}{n^6}\xrightarrow{n\to+\infty}0$.

Podobně pro $\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 - \sqrt[n]{n} + (3n-5)\,n!}{3^n + (n+1)! + n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(3n-5)\cancel{n!}\left(\frac{n^2}{(3n-5)n!} - \frac{\sqrt[n]{n}}{(3n-5)n!} + 1\right)}{(n+1)\cancel{n!}\underbrace{\left(\frac{3^n}{n!} + 1 + \frac{n^3}{n!}\right)}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 1}}$

podle škály

$\overset{AL}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cancel{n}\left(3 - \frac{5}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \overset{AL}{=} 3$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt[3]{3^n + 2\cdot 2^n} - \sqrt[3]{3^n + 2^n}} = \dfrac{2}{3^{2/3}}$, protože

$\sqrt[3]{3^n + 2\cdot 2^n} - \sqrt[3]{3^n + 2^n} = \dfrac{(\cancel{3^n} + 2\cdot 2^n) - (\cancel{3^n} + 2^n)}{\sqrt[3]{3^n + 2\cdot 2^n}^2 + \sqrt[3]{3^n + 2\cdot 2^n}\sqrt[3]{3^n + 2^n} + \left(\sqrt[3]{3^n + 2^n}\right)^2} =$

$\dfrac{2^n}{3^{\frac{2}{3}n}\left(\sqrt[3]{1 + 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}^2 + \sqrt[3]{1 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n}\sqrt[3]{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} + \sqrt[3]{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}^2\right)}$

$\left(\dfrac{2}{3^{2/3}}\right)^n \dfrac{1}{3\cdot 2^{2/3}} \leq \quad -\!\!/\!\!/\!\!- \quad \leq \left(\dfrac{2}{3^{2/3}}\right)^n \dfrac{1}{3}$

pro $n > 2$

a tedy

$\dfrac{2}{3^{2/3}} \sqrt[n]{\dfrac{1}{3\cdot 2^{2/3}}} \leq \sqrt[n]{\sqrt[3]{3^n + 2\cdot 2^n} - \sqrt[3]{3^n + 2^n}} \leq \dfrac{2}{3^{2/3}} \dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}$

$\xrightarrow{n\to+\infty} \dfrac{2}{3^{2/3}}$

4a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt[3]{3^n + 2\cdot 2^n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^{n/3}\sqrt[3]{1 + 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}} =$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{3}\ \sqrt[n]{\sqrt[3]{1 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n}} = \sqrt[3]{3}$, protože

$1 \leq \sqrt[n]{\sqrt[3]{1 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n}} \leq \sqrt[n]{\sqrt[3]{2}}$ pro $n > 2$

$\xrightarrow{n\to+\infty} 1$

5) A) Volme $a_n = \sqrt{5+(-1)^n}$, pak $a_{2n} = \sqrt{6} \in (2,3)$

$a_{2n-1} = \sqrt{4} = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}: [a_n] = 2$, ale $[a_{2n}^2] = 6$, $[a_{2n-1}^2] = 4$

limita $\lim\limits_{n\to+\infty} [a_n^2]$ tedy neexistuje.

B) Def $a_n = (-1)^n$, pak $\lfloor a_n^2 \rfloor = 1 \longrightarrow 1$ pro $n \to +\infty$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \lfloor a_n \rfloor$ neexistuje.

C) Protože $\lfloor x \rfloor$ nabývá pouze hodnot z $\mathbb{Z}$, musí platit, že

$\lim\limits_{n\to+\infty} \lfloor a_n^2 \rfloor = k$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$. Z def. limity dostaneme, že

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : [a_n^2] = k \Rightarrow k \le a_n^2 < k+1$

$\underset{a_n > 0}{\Rightarrow} \quad \sqrt{k} \le a_n < \sqrt{k+1}.$

V intervalu $(\sqrt{k}, \sqrt{k+1})$ neleží žádné celé číslo, protože, pokud by tam leželo:

$\exists l \in \mathbb{Z};\ \sqrt{k} < l < \sqrt{k+1} \Rightarrow k < l^2 < k+1$ a to je spor.

Tedy $\exists K \in \mathbb{Z} : [\sqrt{k}, \sqrt{k+1}) \subset [K, K+1)$ (pokud $\sqrt{k} \in \mathbb{Z}$ volíme $K = \sqrt{k}$)

Snadno dokážeme, že $[a_n] = K$ $\forall n > n_0$ a tedy $\lim\limits_{n\to+\infty} [a_n]$ existuje

a rovná se $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = K$.