Zkoušková písemka z UPDR, var. 1, ZS 2020-21

(1) Mějme diferenciální rovnici $\cos(x)\partial_x^2 u - 2\partial_x\partial_y u + e^y\partial_x u - \partial_y u = 0$. a) Určete typ rovnice na okolí bodu $(0,0)$. b) Převeďte rovnici na tvar, který v bodě $(0,0)$ neobsahuje smíšené druhé parciální derivace. c) Je-li to možné odstraňte z rovnice v bodě $(0,0)$ první derivace.

(2) Buď $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$. Uvažme úlohu $x\partial_x u + (x^2 + y)\partial_y u = 0$ pro neznámou funkci $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s počáteční podmínkou $u(x,0) = u_0(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$. a) Najděte řešení zadané úlohy na jistém okolí bodu $(1,0)$. b) Pro která u_0 existují C^1 řešení úlohy s počáteční podmínkou $u(x,1) = u_0(x)$ na jistém okolí bodu $(0,1)$?

(3) Uvažme úlohu $\partial_t u - \partial_x^2 u + u = 0$ v $(0,+\infty)\times(0,\pi)$ s okrajovou podmínkou $\partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,2\pi) = 0$ pro $t > 0$ a počáteční podmínkou $u(0,x) = u_0(x)$ pro $x \in (0,\pi)$ a dané u_0. a) Najděte kandidáta na řešení úlohy. b) Diskutujte konvergenci nalezené řady v čase $t = 0$. Za jakých podmínek na u_0 konverguje stejnoměrně? c) Najděte řešení úlohy pro $u_0(x) = \cos^4(x)$.