ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKA Z UPDR, VAR. 3, ZS 2022-23

(1) Mějme diferenciální rovnici $2\partial_x^2 u + 6\partial_x\partial_y u + 5\partial_y^2 u + \partial_y u = 0$. a) Určete typ rovnice. b) Převeďte rovnici na tvar, který neobsahuje smíšené druhé parciální derivace ani derivace prvního řádu.

(2) Buď $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$. Uvažme úlohu $(3x + 4y)\partial_x u + (4x - 3y)\partial_y u = 0$ pro neznámou funkci $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Najděte řešení zadané úlohy s počáteční podmínkou $u(x, 0) = u_0(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$ na jistém okolí bodu $(1, 0)$.

(3) Buď $u_0 \in C([0, \pi])$. Uvažme úlohu $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$ v $\Omega := (0, \pi) \times (0, \pi)$ s okrajovou podmínkou $u = 0$ na $([0, \pi] \times \{\pi\}) \cup (\{0, \pi\} \times [0, \pi])$ a $u(x, 0) = u_0(x)$ pro $x \in [0, \pi]$. a) Najděte kandidáta na řešení úlohy, b) Najděte řešení, pokud $u_0(x) = \sin(x)$.

①

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)^{(-\frac{3}{2})} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & \cancel{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Rovnice je eliptická a substituce $u(x,y) = v(x, -\frac{3}{2}x + y)$ přejde na

$$2\partial_1^2 v + \frac{1}{2}\partial_2^2 v + \partial_2 v = 0$$

Člen $\partial_2 v$ odstraníme substitucí: $v(x,y) = e^{\alpha y} w(x,y)$

$$\partial_y v(x,y) = e^{\alpha y}\left(\alpha w(x,y) + \partial_2 w(x,y)\right)$$

$$\partial_2^2 v(x,y) = e^{\alpha y}\left(\alpha^2 w(x,y) + 2\alpha\partial_2 w(x,y) + \partial_2^2 w(x,y)\right)$$

Po dosazení:

$$2\partial_1^2 w + \frac{1}{2}\partial_2^2 w + \underline{\alpha\partial_2 w} + \frac{\alpha^2}{2} w + \underline{\partial_2 w} + \alpha w = 0$$

Pro $\alpha = -1$ zmizí člen s 1. derivací a dostaneme

$$2\partial_1^2 w + \frac{1}{2}\partial_2^2 w - \frac{1}{2} w = 0$$

(2)

$x' = 3x + 4y \quad \to \quad x'' = 3x' + 4y' = 3x' + 16x - 12y$

$y' = 4x - 3y \quad \to \quad 4y = x' - 3x \; ; \; 12y = 3x' - 9x$

$$\Rightarrow x'' = 25x$$

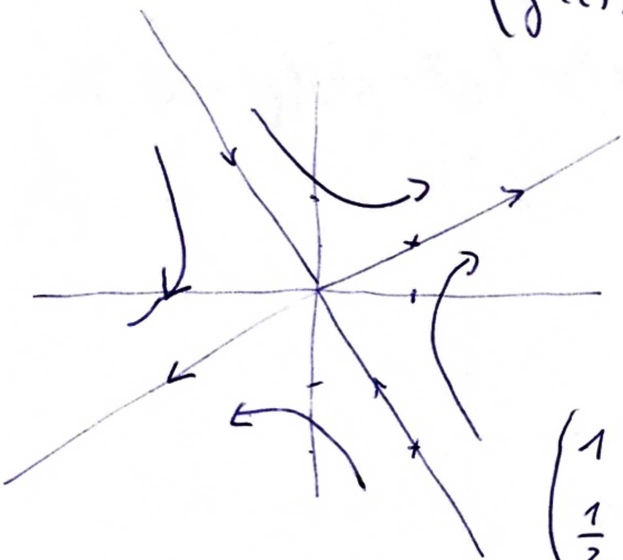
$$\Rightarrow x(t) = Ae^{5t} + Be^{-5t}$$

$$y'(t) + 3y(t) = 4Ae^{5t} + 4Be^{-5t} \qquad / \cdot e^{3t}$$

$$\left(y(t)e^{3t}\right)' = 4Ae^{8t} + 4Be^{-2t} = \left(\frac{A}{2}e^{8t} - 2Be^{-2t} + C\right)'$$

$$y(t) = \frac{A}{2}e^{5t} - 2Be^{-5t} + Ce^{-3t}$$ (ale $C=0$ z dosazení do 1. rovnice)

Charakteristiky: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ae^{5t} \\ Be^{-5t} \end{pmatrix}, \; A, B \in \mathbb{R}$



$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(1,0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ \frac{1}{2} & -2 & y \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 5 & x-2y \end{array}\right)$$

$B = \frac{x-2y}{5}$; $A = x - B =$ ~~$x + \frac{2y}{5}$~~ $\frac{4x}{5} + \frac{2y}{5}$

~~$y(t) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2y}{5}\right)e^{5t} +$ [scribble] $\frac{4y}{5}e^{-5t} = 0$~~

~~$\frac{1}{2}\left(x + \frac{2y}{5}\right)e^{10t} = -\frac{4y}{5}$~~

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{4x}{5} + \frac{2y}{5}\right)e^{5t} - 2\,\frac{x-2y}{5}e^{-5t} = 0$$

$$\frac{4x+2y}{10}e^{10t} = \frac{2}{5}(x-2y), \quad e^{10t} = \frac{x-2y}{2x+y} \cdot 2$$

$$t^* = \lg\left(\sqrt[10]{\frac{2x-4y}{2x+y}}\right) \qquad x(t^*) = \ldots$$

$$x(t^*) = \frac{4x+2y}{5}\sqrt{\frac{2x-4y}{2x+y}} + \frac{x-2y}{5}\sqrt{\frac{2x+y}{2x-4y}}$$

Hledané řešení je

$$u(x,y) = u(x(t^*),0) = u_0\left(\frac{2}{5}\sqrt{(2x+y)(2x-4y)}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{10}\sqrt{(2x-4y)(2x+y)}\right) =$$

$$= u_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{(2x+y)(2x-4y)}\right) \text{ např. } \mathcal{U}(1,0)$$

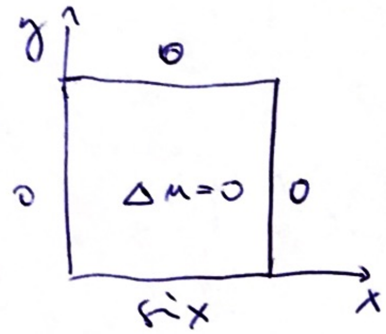
? Je $(2x+y)(x-2y) = 2x^2 - 3xy - 2y^2$ řešení rovnice?

Zk: $(3x+4y)(4x-3y) + (4x-3y)(-3x-4y) = 0$ ✓

(3) $-\partial_1^2 u - \partial_2^2 u = 0$ v $(0,\pi)^2$

$u = 0$ v $\left(\{0,\pi\}\times[0,\pi]\right) \cup [0,\pi]\times\{\pi\}$

$u(x,0) = \sin x$



Řešení hledáme ve tvaru

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} X_k(x)\,Y_k(y)$$

Podosazení do rovnice:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} X_k'' Y_k + X_k Y_k'' = 0$$

Chceme $-X'' = \lambda X$ v $(0,\pi)$ a $X(0) = X(\pi) = 0$

i) $\lambda \geq 0$, protože $\lambda \int_0^\pi X^2 = -\int_0^\pi X'' X = \int_0^\pi |X'|^2$

ii) $\lambda = 0$: $X(x) = Ax + B$; $X(0) = B = 0$

$0 = X(\pi) = A\pi + B \Rightarrow A = 0$

pouze triv. řešení

iii) $\lambda > 0$, def $\lambda = +\mu^2$, $\mu > 0$

$X(x) = A\sin(\mu x) + B\cos(\mu x)$; $X(0) = 0 = B$

$0 = X(\pi) = A\sin(\mu\pi) \Rightarrow$

pro netriv. řešení nutně $\mu \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

Vlastní čísla si značíme pouze

$$X_k(x) = \sin(kx) \;;\quad \lambda_k = +k^2 \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}$$

Rovnice pro Y_k: $Y'' - k^2 Y = 0$ v $(0,\pi)$

$Y(\pi) = 0$

$Y(y) = Ae^{ky} + Be^{-ky}$, $Y(\pi) = 0 = Ae^{k\pi} + Be^{-k\pi}$

Volím: $A = \frac{ce^{-k\pi}}{2}$, $B = \frac{-ce^{k\pi}}{2} \Rightarrow Y_k(y) = \frac{e^{k(y-\pi)} - e^{k(\pi-y)}}{2}$

$$Y_k(y) = c_k \sinh(k(y-\pi))$$

Kandidát na řešení: $u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sinh(k(y-\pi)) \sin(kx)$

Podm. v $y=0$:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} -c_k \sinh(\pi k) \sin kx, \text{ tedy}$$

$$-c_k \sinh(\pi k) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0(\tau) \sin k\tau \, d\tau = \hat{u}_{0k}$$

$$\Rightarrow \text{Kandidát: } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sinh[k(\pi-y)]}{\sinh(k\pi)} \sin(kx)\, \hat{u}_{0k}$$

Pro $u_0(x) := \sin x$ dostaneme řešení.

$$u(x,y) = \frac{\sinh(\pi - y)}{\sinh \pi} \sin(x)$$