Zkoušková písemka z UPDR, var. 2, ZS 2022-23

(1) Mějme diferenciální rovnici $4\partial_x^2 u + 12\partial_x\partial_y u + 2\partial_y^2 u + 2\partial_x u - 3\partial_y u = 0$. a) Určete typ rovnice. b) Převeďte rovnici na tvar, který neobsahuje smíšené druhé parciální derivace. c) Je-li to možné odstraňte z rovnice první derivace.

(2) Buď $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$. Uvažme úlohu $(1 + x^2)\partial_x u + (y + \operatorname{arctg}(x))\partial_y u = 0$ pro neznámou funkci $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. a) Najděte řešení zadané úlohy s počáteční podmínkou $u(0, y) = u_0(y)$ pro $y \in \mathbb{R}$ na jistém okolí bodu $(0, 1)$.

(3) Buď $u_0, u_1 \in C((0, \pi))$. Uvažme úlohu $\partial_1^2 u - \partial_2^2 u = 0$ v $\Omega := (0, +\infty) \times (0, \pi)$ s okrajovou podmínkou $\partial_2 u = \partial_2 u = 0$ v $(0, +\infty) \times \{0, \pi\}$ a počáteční podmínkou $u = u_0$ a $\partial_1 u = u_1$ v $\{0\} \times (0, \pi)$. a) Najděte kandidáta na řešení úlohy, b) Najděte řešení pokud $u_0(x) = \cos(x)$ a $u_1(x) = \cos^2(x)$.

Zkoušková písemka z UPDR, var. 2, ZS 2022-23

(1) Mějme diferenciální rovnici $4\partial_x^2 u + 12\partial_x\partial_y u + 2\partial_y^2 u + 2\partial_x u - 3\partial_y u = 0$. a) Určete typ rovnice. b) Převeďte rovnici na tvar, který neobsahuje smíšené druhé parciální derivace. c) Je-li to možné odstraňte z rovnice první derivace.

(2) Buď $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$. Uvažme úlohu $(1 + x^2)\partial_x u + (y + \operatorname{arctg}(x))\partial_y u = 0$ pro neznámou funkci $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. a) Najděte řešení zadané úlohy s počáteční podmínkou $u(0, y) = u_0(y)$ pro $y \in \mathbb{R}$ na jistém okolí bodu $(0, 1)$.

(3) Buď $u_0, u_1 \in C((0, \pi))$. Uvažme úlohu $\partial_1^2 u - \partial_2^2 u = 0$ v $\Omega := (0, +\infty) \times (0, \pi)$ s okrajovou podmínkou $\partial_2 u = \partial_2 u = 0$ v $(0, +\infty) \times \{0, \pi\}$ a počáteční podmínkou $u = u_0$ a $\partial_1 u = u_1$ v $\{0\} \times (0, \pi)$. a) Najděte kandidáta na řešení úlohy, b) Najděte řešení pokud $u_0(x) = \cos(x)$ a $u_1(x) = \cos^2(x)$.

(1)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{/2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} \cancel{2}\,1 & 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ \cancel{6}\,3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\cdot(-3)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \cancel{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

Tzn. rovnice je hyperbolická $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

s $P^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ Transformace souřadnic: $\xi = \frac{x}{2}$

$\zeta = -\frac{3}{2}x + y$

$$u(x,y) = v\left(\frac{x}{2}, -\frac{3x}{2} + y\right)$$

$$\partial_1 u = \partial_1 v \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\partial_2 v \quad ; \quad \partial_2 u = \partial_2 v \text{ (v příslušných bodech)}$$

$$\partial_1^2 u = \frac{1}{4}\partial_1^2 v - \frac{3}{2}\partial_1\partial_2 + \frac{9}{4}\partial_2^2 v \qquad /\cdot 4$$

$$\partial_2\partial_1 u = \partial_2\partial_1 v \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\partial_2^2 v \qquad /\cdot 12$$

$$\partial_2^2 u = \partial_2^2 v \qquad /2$$

$$4\partial_1^2 u + 12\partial_1\partial_2 u + 2\partial_2^2 u = \partial_1^2 v(1) + \partial_{12} v\underbrace{(-6 + 12/2)}_{=0} + \partial_2^2 v(9 - 18 + 2)$$

$$= \partial_1^2 v - 7\partial_2^2 v$$

$$2\partial_1 u - 3\partial_2 u = \partial_1 v - 3\partial_2 v - 3\partial_2 v = \partial_1 v$$

$\longrightarrow$ rovnice po transformaci: $\partial_1^2 v - 7\partial_2^2 v + \partial_1 v = 0$

$$v(\xi,\zeta) = w(\xi,\zeta)e^{\alpha\xi} : \partial_1 v(\xi,\zeta) = (\partial_1 w(\xi,\zeta) + \alpha w(\xi,\zeta))e^{\alpha\xi}$$

$$\partial_1^2 v(\xi,\zeta) = e^{\alpha\xi}(\partial_1^2 w + 2\alpha\partial_1 w + \alpha^2 w)(\xi,\zeta)$$

$$\partial_1^2 v + \partial_1 v = e^{\alpha\xi}\left(\partial_1^2 w + \partial_1 w\underbrace{(2\alpha + 1)}_{=0} + w\underbrace{(\alpha^2 + \alpha)}_{=-\frac{1}{4}}\right), \text{ volíme } \alpha = -\frac{1}{2}$$

Výsledná rovnice: $\partial_1^2 w - 7\partial_2^2 w - \frac{1}{4} w = 0$

(2) $x' = 1+x^2$ $\qquad \frac{x'}{1+x^2} = (\operatorname{arctg} x)' = (c+t)'$, $\quad x(t) = \operatorname{tg}(t+c)$

$t + c \in$

$y' = y + \operatorname{arctg} x$; $\quad y' - y = t + C$, $\quad (e^{-t}y(t))' = te^{-t} + Ce^{-t}$

$e^{-t}y(t) = e^{-t}(-1-t-C) + D\cancel{y}$, $\quad y(t) = -1-t-C+De^{t}$

$\int t e^{-t}\,dt = [-te^{-t}] + \int e^{-t}\,dt = -e^{-t}(t+1)$

$\downarrow d \quad \downarrow i$

$1 \quad -e^{-t}$

$x(0) = \operatorname{tg} C = x$, $\quad C = \operatorname{arctg}(x)$

$y = y(0) = -1 - \operatorname{arctg} x + D$, $\quad D = 1 + y + \operatorname{arctg} x$

Charakteristika procházející bodem (x,y): $t \longrightarrow (\operatorname{tg}(t+\operatorname{arctg} x),$
$-1-t-\operatorname{arctg} x + (1+y+\operatorname{arctg} x)e^{t}$

tj. $t \longrightarrow (\operatorname{tg}(t+\operatorname{arctg} x), (1$ [redacted] $+ \operatorname{arctg} x)(e^{t}-1)$
$+ye^{t} - t)$

$x(t^*) = 0 \Rightarrow t^* = -\operatorname{arctg} x$

$y(t^*) = (1+\operatorname{arctg} x)(e^{-\operatorname{arctg} x} - 1) + ye^{-\operatorname{arctg} x} + \operatorname{arctg} x$

Řešení rovnice na okolí bodu $(0,1)$ s podmínkou $u(0,y) = u_0(y)$ je

$$u(x,y) = u(\underbrace{x(t^*)}_{=0}, y(t^*)) = u_0(y(t^*)) =$$

$$= u_0\left((1+\operatorname{arctg} x)(e^{-\operatorname{arctg} x} - 1) + ye^{-\operatorname{arctg} x} + \operatorname{arctg} x\right)$$

③

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$$

$\partial_x u = 0$ (at 0), $\partial_x u = 0$ (at π)

$u_0 = 0$

$u_1 = u_1$

Řešení hledáme ve tvaru

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} T_k(t)\, X_k(x).$$

Dosadíme do rovnice:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} T_k''(t)\, X_k(x) - T_k(t)\, X_k''(x) = 0 \qquad (+)$$

Chceme $-X_k'' = \lambda_k X$ v $(0,\pi)$

$$X_k'(0) = X_k'(\pi) = 0$$

Protože $\int_0^\pi \lambda_k |X_k|^2 = -\int_0^\pi X_k'' X_k = \int_0^\pi |X_k'|^2$, musí být $\lambda_k \geq 0$

~~[illegible]~~ $\lambda_0 = 0$: $X_0(x) = Ax + B$; $X_0'(x) = A \Rightarrow A = 0$ z okr. podm.

$$X_0 = 1$$

$\lambda_k > 0$: $X_k(x) = A\cos(\sqrt{\lambda_k}\, x) + B\sin(\sqrt{\lambda_k}\, x)$; $X_k'(x) = \sqrt{\lambda_k}\big(A\sin(\sqrt{\lambda_k}\, x) + B\cos(\sqrt{\lambda_k}\, x)\big)$

$\Rightarrow$, $X_k'(0) = \sqrt{\lambda_k}\, B \Rightarrow B = 0$

$X_k'(\pi) = \sqrt{\lambda_k}\, A \sin(\sqrt{\lambda_k}\,\pi) \overset{?}{=} 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_k} \in \mathbb{Z}$ ale tak? navíc $\sqrt{\lambda_k} = k \in \mathbb{N}$

$\lambda_k = k^2$; $X_k(x) = \cos(kx)$

Řešení hledáme ve tvaru: $\sum_{k=1}^{+\infty} T_k(t)\cos(kx) + T_0(t) = u(t,x)$

Z (+) a def X_k plyne: $\sum_{k=1}\big(T_k''(t) + k^2 T_k(t)\big) X_k(x) + T_0''(t) = 0$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$: $T_k''(t) + k^2 T_k(t) = 0$; $T_k(t) = \alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt$

$T_0''(t) = 0$; $T_0(t) = \alpha_0 + \beta_0 t$

Tedy: $u(t,x) = \beta_0 t + \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt)\cos kx$

Dosadíme do poč. podmínky:

$$\alpha_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \cos(kx) = u_0(x)$$

$$\beta_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} k \beta_k \cos kx = u_1(x)$$

Pro koeficienty tedy musí platit

$$\alpha_0 \beta_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi u_0 \; ; \quad \alpha_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_0(y)\cos(ky)\,dy$$

$$\beta_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi u_1 \; ; \quad \beta_k = \frac{2}{\pi k}\int_0^\pi u_1(y)\cos(ky)\,dy$$

Speciální případ $u_0(x) = \cos x$

$$u_1(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$$

$$\cancel{u(t,x) = \frac{1}{2}t + \cos x\, e^{-t} + \frac{1}{4}\cos 2x\, e^{-4t}}$$

$$u(t,x) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\cos 2x \sin 2t + \cos x \cos t \text{ pro}$$

$$t \geq 0,\ x \in [0,\pi]$$