ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKA Z UPDR, VAR. 1, ZS 2022-23

(1) Mějme diferenciální rovnici $\partial_x^2 u - 6\partial_x\partial_y u + 9\partial_y^2 u + \partial_y u + 2u = 0$. a) Určete typ rovnice. b) Převeďte rovnici na tvar, který neobsahuje smíšené druhé parciální derivace. c) Je-li to možné odstraňte z rovnice nulté derivace.

(2) Buď $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$. Uvažme úlohu $x^2\partial_x u + xy\partial_y u = 0$ pro neznámou funkci $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. a) Najděte řešení zadané úlohy s počáteční podmínkou $u(x,1) = u_0(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$ na jistém okolí bodu $(1,1)$. b) Pro která u_0 existují C^1 řešení úlohy s počáteční podmínkou $u(x,0) = u_0(x)$ na jistém okolí bodu $(1,0)$?

(3) Buď $f \in C([0,\pi]^2)$. Uvažme úlohu $-\partial_1^2 u - \partial_2^2 u = f$ v $\Omega := (0,\pi)^2$ s okrajovou podmínkou $u = 0$ na $\partial\Omega$. a) Najděte kandidáta na řešení úlohy, b) Najděte řešení pokud $f(x,y) = \sin(x)$.

ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKA Z UPDR, VAR. 1, ZS 2022-23

(1) Mějme diferenciální rovnici $\partial_x^2 u - 6\partial_x\partial_y u + 9\partial_y^2 u + \partial_y u + 2u = 0$. a) Určete typ rovnice. b) Převeďte rovnici na tvar, který neobsahuje smíšené druhé parciální derivace. c) Je-li to možné odstraňte z rovnice nulté derivace.

(2) Buď $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$. Uvažme úlohu $x^2\partial_x u + xy\partial_y u = 0$ pro neznámou funkci $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. a) Najděte řešení zadané úlohy s počáteční podmínkou $u(x,1) = u_0(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$ na jistém okolí bodu $(1,1)$. b) Pro která u_0 existují C^1 řešení úlohy s počáteční podmínkou $u(x,0) = u_0(x)$ na jistém okolí bodu $(1,0)$?

(3) Buď $f \in C([0,\pi]^2)$. Uvažme úlohu $-\partial_1^2 u - \partial_2^2 u = f$ v $\Omega := (0,\pi)^2$ s okrajovou podmínkou $u = 0$ na $\partial\Omega$. a) Najděte kandidáta na řešení úlohy, b) Najděte řešení pokud $f(x,y) = \sin(x)$.

1)

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \sim \underset{P^T}{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

a) rovnice je parabolická v širším smyslu

b) provedeme transformaci $\quad \xi = x$

$$\zeta = 3x + y$$

$$u(x,y) = v(x, 3x+y)$$

$$\partial_1 u = \partial_1 v + \partial_2 v \cdot 3 \qquad \partial_2 u = \partial_2 v$$

$$\partial_1^2 u = \partial_1^2 v + \cancel{6\partial_1\partial_2 v} + 9\partial_2^2 v \qquad /1$$

$$\partial_1\partial_2 u = \cancel{\partial_1\partial_2 v} + 3\partial_2^2 v \qquad /\cdot(-6)$$

$$\partial_2^2 u = \partial_2^2 v \qquad /\cdot 9$$

$$\partial_1^2 v \quad \checkmark$$

$$\partial_2 u + 2u = \partial_2 v + 2v$$

$$\Rightarrow \quad \partial_1^2 v + \partial_2 v + 2v = 0$$

c) $\cancel{w(\xi,\eta) := v(\xi,\zeta)e^{\alpha\eta}}$ $\quad v(\xi,\zeta) = w(\xi,\zeta)e^{\alpha\zeta}$

$$\cancel{\partial_1^2 w} \quad \partial_1^2 v = \partial_1^2 w \, e^{\alpha\zeta}$$

$$\partial_2 v = (\partial_2 w + \alpha w)e^{\alpha\zeta}$$

$$v = w e^{\alpha\zeta} \qquad /2$$

$$\partial_1^2 w + \partial_2 w + (\alpha+2)w = 0$$

Stačí volit $\alpha = -2 \rightarrow \partial_1^2 w + \partial_2 w = 0$

2) Na okolí bodu $\overset{(1,1)\text{ i}}{(1,0)}$ je $x \neq 0$ a je tedy možné rovnici x vydělit.

$$x\partial_x u + y\partial_y u = 0$$

Charakteristiky: $\left.\begin{aligned} x' &= x \implies x(t) = x e^{t} \\ y' &= y \implies y(t) = y e^{t} \end{aligned}\right\}$, chceme-li $(x(0), y(0)) = (x, y)$.

ad1) $y e^{t} = 1 \implies e^{t} = \frac{1}{y}$; $t = \lg \frac{1}{y} = -\lg y$

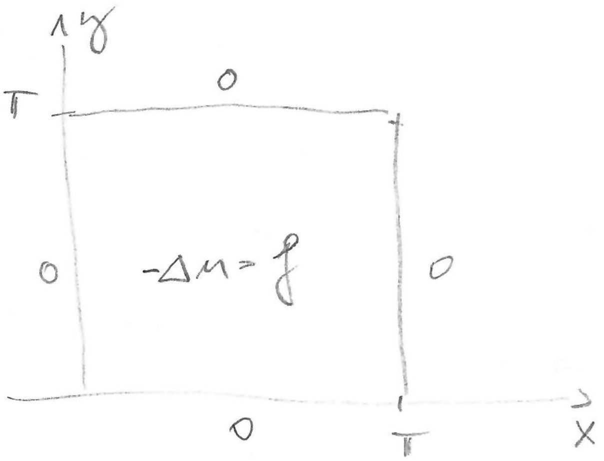
$$x(-\lg y) = x e^{-\lg y} = \frac{x}{y}$$

ad) Hledané řešení má tvar $u(x,y) = \left(u\left(\frac{x}{y}, 1\right)\right) = u_0\left(\frac{x}{y}\right)$

ad2) Protože $t \longmapsto (x e^{t}, 0)$ je charakteristika, musí být

u_0 konstantní na j. okolí bodu 1.

3)



Řešení hledáme ve tvaru: $u(x,y)=\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(y)\sin(kx)$. Dosadíme

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-u_k''(y)+k^2u_k(y)-f_k(y)\right)\sin kx = 0,\ \text{kde } f(x,y)=\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(y)\sin kx.$$

Řešme $-u_k''+k^2u_k=f_k$, tj. $u_k''-k^2u_k=-f_k$, pomocí variace

konstant: $u_k(y)=A_k(y)e^{ky}+B(y)e^{-ky}$, kde

$$A'(y)e^{ky}+B'(y)e^{-ky}=0 \qquad /k \quad /+k$$

$$kA'(y)e^{ky}-kB'(y)e^{-ky}=-f_k(y) \qquad /1 \quad /(-1)$$

$$2kA'(y)e^{ky}=-f_k(y),\quad A'(y)=-\frac{f_k(y)}{2k}e^{-ky},\quad A_k(y)=\frac{1}{2k}\left(A_k-\int_0^y f_k(\xi)e^{-k\xi}d\xi\right)$$

$$2kB'(y)e^{-ky}=f_k(y),\quad B'(y)=\frac{f_k(y)}{2k}e^{ky},\quad B_k(y)=\frac{1}{2k}\left(B_k+\int_0^y f_k(\xi)e^{k\xi}d\xi\right)$$

$$\longrightarrow u(x,y)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sin(kx)\left[\frac{1}{2k}\right]\left[\left(A_k-\int_0^y f_k(\xi)e^{-k\xi}d\xi\right)e^{ky}+\left(B_k+\int_0^y f_k(\xi)e^{k\xi}d\xi\right)e^{-ky}\right]$$

A_k a B_k máme z podmínek $y=0$ a $y=\pi$:

$$0=u(x,0)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sin(kx)\frac{1}{2k}(A_k+B_k) \Rightarrow A_k+B_k=0$$

$$0=u(x,\pi)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sin(kx)\frac{1}{2k}\left[e^{k\pi}A_k-\int_0^\pi f_k(\xi)e^{k(\pi-\xi)}d\xi+e^{-k\pi}B_k+\int_0^\pi f_k(\xi)e^{k(\xi-\pi)}d\xi\right]$$

$$\Rightarrow e^{k\pi}A_k+e^{-k\pi}B_k=2\int_0^\pi f_k(\xi)\sinh(k(\pi-\xi))d\xi$$

$$A_k + B_k = 0 \qquad \Big/\cdot(-e^{k\pi}) \qquad \Big/\cdot(-e^{-k\pi})$$

$$e^{k\pi}A_k + e^{-k\pi}B_k = 2\int_0^{\pi} f_k(\xi)\sinh(k(\pi-\xi))\,d\xi \qquad \Big/\cdot 1 \qquad \Big/\cdot 1$$

$$-2B_k \sinh(k\pi) = 2\int_0^{\pi} f_k(\xi)\sinh(k(\pi-\xi))\,d\xi$$

$$B_k = -\int_0^{\pi} f_k(\xi)\,\frac{\sinh(k(\pi-\xi))}{\sinh(k\pi)}\,d\xi$$

$$A_k = \int_0^{\pi} f_k(\xi)\,\frac{\sinh(k(\pi-\xi))}{\sinh(k\pi)}\,d\xi$$

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(kx)\,\frac{1}{2k}\left[A_k\left(e^{ky}-e^{-ky}\right) - \int_0^{y} f_k(\xi)\left(e^{k(y-\xi)}-e^{k(\xi-y)}\right)d\xi\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \sin kx\,\frac{1}{\cancel{2}k}\left[\int_0^{\pi} f_k(\xi)\,\frac{\sinh(k(\pi-\xi))}{\sinh(k\pi)}\cdot\sinh(ky)\,d\xi - \right.$$

$$\left. - \int_0^{y} f_k(\xi)\sinh[k(y-\xi)]\,d\xi\right]$$

Je-li $f(x,y) = \sin x$, je $f_1(y) = 1$ a jinak $f_k \equiv 0$.

$$\int_0^{\pi} \sinh(\pi-\xi)\,d\xi = \Big[-\cosh(\pi-\xi)\Big]_0^{\pi} = \cosh\pi - 1$$

$$\int_0^{y} \sinh(y-\xi)\,d\xi = \Big[-\cosh(y-\xi)\Big]_0^{y} = \cosh y - 1$$

Hledané spec. řešení je tedy

$$u(x,y) = \sin(x)\left[(\cosh\pi - 1)\,\frac{\sinh y}{\sinh\pi} - \cosh y + 1\right]$$

Zdůvodnění spec. tvaru řešení

Fourierova metoda je založená na hledání řešení tvaru

$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(y)\, X_k(x)$. Dosadíme do rce

$$\sum_{l=1}^{+\infty} -u_l''(y)\, X_l(x) - u_l(y)\, X_l''(x) = f(x,y) = \sum_{l=1}^{+\infty} f_l(y)\, X_l(x), \text{ tj.}$$

$$\sum_{l=1}^{+\infty} X_l(x)\left[-u_l''(y)\right] - u_l(y)\, X_l''(x) - f_l(y)\, X_l(x) = 0.$$

Pokud bude platit · $-X_k'' = \lambda_k X_k$ pro $\lambda_k \in \mathbb{R}$ a)

· $\{X_k\}_{k=1}^{+\infty}$ bude báze $L^2(0,\pi)$ b)

· X_k splňují okrajové podmínky ~~na~~ c)

najdeme kandidáta na řešení. Ad a) musíme řešit rovnici, b) spektrální rozklad $f(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(y)\, X_k(x)$, c) samé bc. podmínky pro $x \in \{0,\pi\}$.

Řešme: $-X_k'' = \lambda_k X_k$ v $(0,\pi)$

$$X_k(0) = X_k(\pi) = 0$$

$$\int_0^\pi \lambda_k X_k^2 = -\int_0^\pi X_k'' X_k = \int_0^\pi |X_k'|^2 \text{ tedy } \lambda_k \geq 0$$

$\lambda = 0$: $X_k \equiv 0$ nezajímavé

$\lambda > 0$: $X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}\, x) + B\sin(\sqrt{\lambda}\, x)$, bc $\Rightarrow A = 0$

obecné řešení ODR

netriviality $X \Rightarrow \sqrt{\lambda} \in \mathbb{Z}$

symetrie $\Rightarrow$ stačí $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}$ liché

$\Rightarrow k \in \mathbb{N}$; $\lambda_k = k^2$, $X_k(x) = \sin(kx)$, $\{X_k\}$ tvoří bázi $L^2(0,\pi)$ ⇐ rozšíření klas. FŘ