Zápočtová písemka z Matematické analýzy 1, ZS 2020-21

Písemka číslo 2, verze Úterý 14:00

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně odůvodněte.

(1) Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+3+\sqrt[3]{n}}{(\frac{1}{3})^n+3n+303n^3}$$

(2) Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt[n]{3^n+5^n+n^{-35}}$$

(3) Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n^2+1}{n^2}\Big)^{2n^2}$$

1)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^3+3+\sqrt[3]{n}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+3n+303n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^3}\left(3+\overbrace{\frac{3}{n^3}}^{\to 0}+\overbrace{n^{-\frac{8}{3}}}^{\to 0}\right)}{\cancel{n^3}\left(\underbrace{\frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\to 0}+\underbrace{\frac{3}{n^2}}_{\to 0}+303\right)}$$

podle růstové škály

aritmetika limit

$$= \frac{3}{303} = \frac{1}{101}$$

10

2) $$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \sqrt[n]{3^n+5^n+n^{-35}} \ne \quad (L)$$

$$5\cdot 1 \le 5\sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1+\frac{1}{n^{35}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n} \le 5\cdot\sqrt[n]{3} \xrightarrow{n\to+\infty} 5$$

Tedy $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n+5^n+n^{-35}} = 5.$

Označme $a_n = (-1)^n \sqrt[n]{3^n+5^n+n^{-35}}$. Pak $a_{2n} \xrightarrow{n\to+\infty} 5$ a

$a_{2n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} -5$. Tedy limita (L) nemůže existovat.

10

3) $$\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2} = \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^2 = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

označme $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to+\infty} e$, pak také $a_{n^2} \xrightarrow{n\to+\infty} e$.

Konečně $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2} = \lim_{n\to+\infty} a_{n^2}\cdot a_{n^2} = e^2$$ podle aritmetiky limit

10