16. MOCNINY MATIC ~~A~~ A OPERÁTORŮ

- bude nás zajímat $\|A^k\|$, kde A je matice nebo omezený lineární operátor na Banachově prostoru s normou $\|\cdot\|$.
- tím se vyhneme problémům s neomezenými operátory

Theorem 16.1: Nechť A je matice nebo omezený lin. operátor. Pak existují $H>0$, $M \geq 1$ takové, že

$$\|A^k\| \leq M \cdot H^k \qquad \forall k \geq 0 \tag{16.1}$$

Pro libovolné $z \in \mathbb{C}$ s $|z| > H$ je $z \in \rho(A)$ a rezolventní (resolventa) operátor je dán předpisem

$$(z-A)^{-1} = z^{-1}\left(Id + z^{-1}A + (z^{-1}A)^2 + \dots\right) \tag{16.2}$$

Pro libovolné $k \geq 0$ platí

$$A^k = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma z^k (z-A)^{-1}\, dz, \tag{16.3}$$

kde Γ je libovolná uzavřená křivka, $\mathrm{Int}\,\Gamma \supseteq \sigma(A)$.

Definice:

$$\mathcal{K}(A) := \sup_{\varepsilon > 0} \frac{\rho_\varepsilon(A) - 1}{\varepsilon} = \sup_{|z|>1} (|z|-1) \cdot \overbrace{\|(z-A)^{-1}\|}^{\leq \frac{1}{\varepsilon}} \tag{16.4}$$

$\uparrow$ Kreissova konstanta

kde $\rho_\varepsilon(A) := \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma_\varepsilon(A) \}$ „pseudospectral radius", „ε-pseudospectral abscissa of A"

Theorem 16.2: Jestliže A je matice nebo omezený lin. operátor a $k \geq 0$, pak

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k, \tag{16.5}$$

pro $\varepsilon > 0$ libovolné platí

$$\|A^k\| \leq \frac{\rho_\varepsilon(A)^{k+1}}{\varepsilon} \tag{16.6}$$

Jestliže L_ε je délka hranice $\sigma_\varepsilon(A)$ nebo jejího konvexního obalu pro nějaké $\varepsilon > 0$, pak

$$\|A\|^k \leq \frac{L_\varepsilon \cdot \rho_\varepsilon(A)^k}{2\pi\varepsilon}, \tag{16.7}$$

nakonec

$$\|A\|^k \leq e \cdot (k+1)\, \mathcal{K}(A) \tag{16.8}$$

Důkaz: (16.6), (16.7) plynou z (16.3) tím, že položíme Γ jako $\sigma_\varepsilon(A)$, její konvexní obal, nebo kruh kolem počátku s poloměrem $\rho_\varepsilon(A)$.

$$\|A^k\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{z^k}{z-A}\, dz \right\| \underset{\Gamma = \partial U(0,\rho_\varepsilon(A))}{\leq} \left|\frac{1}{2\pi i}\right| \cdot \underbrace{2\pi \cdot \rho_\varepsilon(A)}_{\text{obvod } \Gamma} \cdot \rho_\varepsilon(A)^k \cdot \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_{\text{neb } \|(z-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\varepsilon}}$$

$$= \frac{\rho_\varepsilon(A)^k}{\varepsilon}$$ což jsme chtěli ... (16.6)

$$\|A^k\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{z^k}{z-A}\, dz \right\| \underset{\Gamma = \partial \sigma_\varepsilon(A)}{\leq} \frac{1}{2\pi} \cdot L_\varepsilon \cdot \frac{\rho_\varepsilon(A)^k}{\varepsilon} \quad \ldots \; (16.7).$$

označ $|\Gamma| = L_\varepsilon$ jako předtím

2]

Theorem 16.3: Pokud A je matice nebo omezený lin. operátor, pak

$$\|A^k\| \geq \rho(A)^k \qquad \forall k \geq 0 \qquad (16.9)$$

a

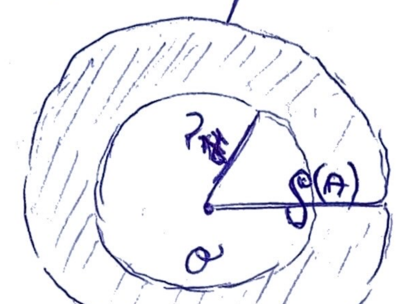
spectral radius (14.19)

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A) =: \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} \qquad (16.10)$$

důkaz: ať pro spor $\exists\, K > 0 : \|A^K\| = \nu < \rho(A)^K$. Ať platí (16.1) s $H \leq 1$ (případ $H = 1$ se udělá podobně). Z (16.1) pak plyne, že $\|A^k\|$ je omezená: $\|A^k\| \leq M$ ~~$\forall k \geq 0$~~ pro $0 \leq k \leq K$

$$\|A^k\| \leq M \quad \text{pro } 0 \leq k < K$$
$$\|A^k\| \leq M\nu \quad \text{pro } K \leq k < 2K$$
$$\|A^k\| \leq M\nu^2 \quad \text{pro } 2K \leq k < 3K \quad \text{atd.}$$

Tudíž pro všechny $k \geq 0$ platí $\|A^k\| \leq \tilde{M} \cdot \tilde{H}^k$ pro $\tilde{H} < \rho(A)$, což je spor.

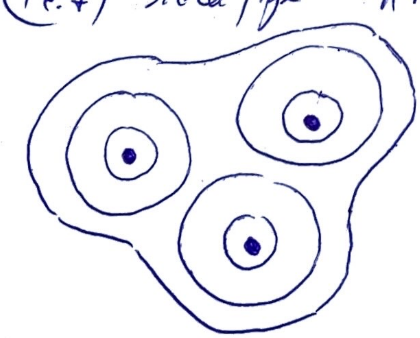


K důkazu (16.10):

$$\liminf_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \overset{(16.9)}{\geq} \rho(A),$$

stačí tedy ukázat, že $\limsup_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \rho(A)$.

(16.7) říká, že $\|A^k\| \leq \dfrac{L_\varepsilon \cdot \rho_\varepsilon(A)^k}{2\pi\varepsilon} \xrightarrow[?]{\varepsilon \to 0} \rho(A)^k$



$\rho_\varepsilon(A) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \rho(A)$ ... jasné (byla na to věta)

$\dfrac{L_\varepsilon}{2\pi\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 1$?

☒

4)

Analogie odhadů (15.4) po mocniny

Theorem 16.4: A matice nebo omezený operátor. Pokud $\|(z-A)^{-1}\| = \frac{K}{|z|-1}$ pro nějaké z s $|z| = r > 1$ a $K > 1$, pak

$$\sup_{k\geq 0}\|A^k\| \geq rK - r + 1 > K. \qquad (16.11)$$

Uvažujeme-li největší $|z|$ pro pevné $\|(z-A)^{-1}\|$, pak

$$\sup_{k\geq 0}\|A^k\| \geq \left(\rho_\varepsilon(A)-1\right)\cdot\left(\frac{\rho_\varepsilon(A)}{\varepsilon}-1\right) \geq \frac{\rho_\varepsilon(A)-1}{\varepsilon} \qquad (16.12)$$

pro každé $\varepsilon > 0$, maximalizujeme-li toto přes ε, dostaneme

$$\sup_{k\geq 0}\|A^k\| \geq \mathcal{K}(A) \dots \text{ Kreissova konstanta} \qquad (16.13)$$

Pro každé $K > 0$ platí

$$\sup_{0<k\leq K}\|A^k\| \geq \frac{r^K}{1+\frac{r^K-1}{rK-r+1}} \qquad (16.15)$$

≥ 0

a pokud $\|A^k\| \leq M$ $\forall k \geq 0$, pak pro $K \geq 0$ s $r < 1$ a $-\infty < \frac{K}{M} \leq 1$ platí

$$\|A^K\| \geq r^K - \frac{r^K-1}{K/M} = 1 - \frac{(r^K-1)\cdot(1-K/M)}{K/M} \qquad (16.16)$$

Pokud $r = 1$ a $K = 0$, (16.16) se podle l'Hospitalova pravidla zjednoduší na

$$\|A^K\| \geq 1 - \frac{KM}{\|(z-A)^{-1}\|}. \qquad (16.17)$$

Důkaz: Protože $\sup_{k\geq 0}\|A^k\| = M$, podle (16.2) pro z s $|z| = r > 1$ platí

$$\frac{rK}{r-1} \overset{\text{def.}}{=} r\cdot\|(z-A)^{-1}\| \underset{(A)}{\overset{(16.2)}{\leq}} r|z^{-1}|\sum_{k=0}^{\infty}\|(z^{-1}A)^k\| \leq$$

$$\leq r\cdot\frac{1}{r}\sum_{k=0}^{\infty}|z^{-1}|^k\cdot\underbrace{\|A^k\|}_{\leq \sup} \leq 1 + \frac{\|A\|}{r} + \frac{\|A^2\|}{r^2} + \dots \leq$$

$$\leq 1 + M\cdot\sum_{k=1}^{\infty} r^{-k} \overset{\text{geom. ř.}}{=} 1 + \frac{M}{r-1}.$$

tedy $\frac{rK}{r-1} \le 1 + \frac{M}{r-1}$ — $\sup \|A^k\|$ ... úpravou dostaneme

$\sup \|A^k\| \ge \underbrace{rK - r + 1}$ ... což jsme chtěli

$= K + \underbrace{(r-1)}_{>0} \cdot \underbrace{(K-1)}_{>0} > K$

(16.12): $\sup \|A^k\| \ge K \overset{\text{def.}}{=} \overbrace{\|(z-A)^{-1}\|}^{\ge \frac{1}{\varepsilon}} \cdot (\overbrace{|z|}^{\ge \rho_\varepsilon(A)} - 1) \overset{?}{\ge} \frac{\rho_\varepsilon(A)-1}{\varepsilon}$

pro $|z| = r > 1$

$\Rightarrow$ vezmeme le $\sup_z$

čímž dostaneme (16.13)

(16.15): $M_K := \sup_{0<k\le K} \|A^k\|$ $\Rightarrow \|A^k\| \le M_K$ pro $0 < k \le K$

$\Rightarrow \|A^k\| \le M_K^2$ pro $K \le k \le 2K$ atd.

$r \cdot \|(z-A)^{-1}\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|(z^{-1}A)^k\| = \|I\| + \|z^{-1}A\| + \|(z^{-1}A)^2\| + \dots$

$\le \underbrace{1 + \frac{1}{r}M_K + \dots + \frac{1}{r^K}M_K}_{K\text{-krát}} + \frac{1}{r^{K+1}}M_K^2 + \dots + \frac{1}{r^{2K}}M_K^2 + \frac{1}{r^{2K+1}}M_K^3 + \dots$

$\le 1 + \frac{1}{r}M_K + \dots + \frac{1}{r^K} \cdot M_K + \frac{1}{r^{K+1}} \cdot M_K^2 + \dots + \frac{1}{r^{2K}} M_K^2 + \frac{1}{r^{2K+1}} M_K^3 + \dots$

$= 1 + \sum_{k=1}^{K} r^{-k} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} r^{-jK} M_K^{j+1}$

Pokud $M_K \ge r^K$, pak (16.15) platí ... neb r^K dělíme něčím ≥ 1

Nechť $M_K < r^K$ ... pak ty řady lze sečíst.

$r \cdot \|(z-A)^{-1}\| \le 1 + \sum_{k=1}^{K} r^{-k} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{r^{-jK} M_K^{j+1}}_{|\cdot| < 1}$ geom. ř.

$1 + \sum_{k=1}^{K} r^{-k} \cdot \frac{-M_K}{r^{-K}M_K - 1} \underset{\text{geom. ř.}}{=} 1 + \frac{-M_K r^K}{M_K - r^K} \cdot \frac{1 - r^{-K}}{1 - r^{-1}} \cdot r^{-1} =$

6]

$$= 1 + \frac{-M_k \cdot r^k}{M_k - r^k} \cdot \frac{1 - r^{-k}}{1 - r^{-1}} \cdot r^{-1} = 1 + \frac{-M_k \cdot r^k}{M_k - r^k} \cdot \frac{r^{-1} - r^{-k-1}}{1 - r^{-1}} =$$

$$= 1 + \frac{-M_k \cdot r^k}{M_k - r^k} \cdot \frac{1 - r^{-k}}{r - 1} = 1 + \frac{1 - r^{-k}}{r - 1} \cdot \frac{r^k}{\frac{r^k}{M_k} - 1} =$$

$$\stackrel{\dots}{=} \frac{r^k - 1}{(r-1) \cdot \left(\frac{r^k}{M_k} - 1\right)}$$

Vezmeme nakonec

$$\underbrace{r \cdot \|(z-A)^{-1}\|}_{:= \frac{rk}{|z|-1}} \le \frac{r^k - 1}{(r-1) \cdot \left(\frac{r^k}{M_k} - 1\right)}$$

... odčtené jedničky

$$\Rightarrow \frac{rk}{} \le \frac{r^k - 1}{\left(\frac{r^k}{M_k} - 1\right)} - 1$$

$$M_k < rk$$

$$\frac{1}{1 + \frac{rk - r + 1}{r - 1}} \ge \frac{(r-1) \cdot \frac{r^k}{M_k} - 1}{r^k - 1}$$

$$r \cdot \|(z-A)^{-1}\| \le 1 +$$

$$\frac{rk}{r-1} \le \frac{r^k - 1}{(r-1) \cdot \left(\frac{r^k}{M_k} - 1\right)} \Rightarrow \frac{rk}{r-1} - 1 \le \frac{r^k - 1}{(r-1) \cdot \left(\frac{r^k}{M_k} - 1\right)} - 1$$

$$\frac{rk - r + 1}{r^k - 1} \le \frac{\overbrace{rk - r + 1}^{<0 \;\; (1) \;\; r > 1}}{\underbrace{r^k - 1}_{>0}} \le \frac{1}{\frac{r^k}{M_k} - 1} \Rightarrow \frac{r^k - 1}{rk} \ge \frac{r^k}{M_k} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{r^k}{M_k} \le 1 + \frac{r^k - 1}{rk} \Rightarrow M_k \ge \frac{r^k}{1 + \frac{r^k - 1}{rk}}$$

$$\frac{rk - r + 1}{r - 1} \le \underbrace{r \cdot \|(z-A)^{-1}\|}_{= \frac{rk}{r-1}} \le \frac{r^k - 1}{(r-1) \cdot (r^k / M_k - 1)}$$

... odtud plyne (16.15)

(16.16) r vyjde okamžitě, nechť $\|A^K\| = P$, podle (16.1) ..

pro $0 \le k < K$: $\|A^k\| \le M$; $\|A^{K+k}\| \le PM$,

$\|A^{2K+k}\| \le P^2 M$ atd. Jestliže $P \ge r^K$, (16.16) platí

$$r^K - \frac{r^K - 1}{K/M} \le P - \frac{P-1}{K/M} = P - \underbrace{\frac{(P-1)M}{K}}_{\geq 0 ?}$$

≤ 1

$K = \|(z-A)^{-1}\| \cdot (|z| - 1)$ — může být zaporné $M \overset{?}{\ge} P$

$\|A^k\| \le M \quad \forall k = 0$

speciálně $P \le M$

$$\frac{(P-1) \cdot M}{\|(z-A)^{-1}\| (|z|-1)} \qquad P - 1 \ge r^K - 1 \overset{r>1}{\ge} r - 1$$

---

nechť $P < r^K$, podle (16.2) dostaneme

$$\frac{K}{M} \overset{\text{def.}}{=} \frac{\|(z-A)^{-1}\|(|z|-1)}{M} \underset{\text{def.}}{\le} \frac{\|(z-A)^{-1}\| \cdot (|z|-1)}{\cancel{\|A^k\|} M} \qquad \frac{(16.2)}{(4)}$$

pro $r \ge 0$ lib.

$$\le \frac{(r-1) \cdot r^{-1}}{\cancel{\|A^k\|} M} \overset{!}{\sum_{m=0}^{\infty}} \|(z^{-1}A)^m\| \le \frac{r-1}{r} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} |z|^{-m} \cdot \frac{\|A^m\|}{\cancel{\|A^k\|} M}$$

$$= \frac{r-1}{r} \left(1 + \frac{1}{r} \cdot \frac{\|A\|}{\cancel{\|A^k\|} M} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\|A^2\|}{\cancel{\|A^k\|} M} + \dots + \frac{1}{r^K} \cdot \frac{\|A^K\|}{\cancel{\|A^k\|} M} + \dots \right)$$

$$\le \frac{r-1}{r} \cdot \left(1 + \frac{1}{r} + \dots + \frac{1}{r^{K-1}} + \frac{1}{r^K} P + \dots + \frac{1}{r^{2K-1}} \cdot P + \frac{1}{r^{2K}} P^2 + \dots \right)$$

$$\le \frac{r-1}{r} \cdot \sum_{k=0}^{K-1} r^{-k} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} P^m \cdot r^{-mK} \quad \text{geom. ř.}$$

$$= \frac{r-1}{r} \cdot \sum_{k=0}^{K-1} r^{-k} \cdot \frac{1}{P \cdot r^{-K} - 1} = \frac{\cancel{r-1}}{r} \cdot \frac{1}{P r^{-K} - 1} \cdot \frac{1 - r^{-K}}{\cancel{1-r}}$$

$$= \frac{1 - r^{-K}}{1 - P r^{-K}}$$

$$\frac{k}{M} \le \frac{1-r^{-k}}{1-(p\,r^{-k})} \quad \dots \quad \dots \qquad \frac{1-r^{-k}}{k/M} \ge 1 - p\,r^{-k}$$

chceme vyjádřit

$$\Downarrow$$

$$p\,r^{-k} \ge 1 - \frac{1-r^{-k}}{k/M}$$

$$\xRightarrow{\cdot r^{-k}} \quad p \ge r^{k} - \frac{r^{k}-1}{k/M}$$

$$\|$$

$$\|A^k\| \quad \dots \text{ což jsme chtěli}$$

$\boxtimes$

Theorem 16.6: Nechť A je matice nebo omezený lineární operátor. Pro každé $k>0$ platí:

$$A^k = 0 \iff \sigma(A) = \{0\} \wedge \|(z-A)^{-1}\| = O(|z|^{-k}). \qquad (16.26)$$

Důkaz: Jestliže $\|(z-A)^{-1}\| = O(|z|^{-k})$, pak $A^k = 0$ plyne z (16.2)

tj. z: $(z-A)^{-1} = z^{-1}\left(Id + z^{-1}A + (z^{-1}A)^2 + \dots\right)$ ... absolutně konvergentní

kdyby to neplatilo, dostaneme spor s řádem konvergence

$$\overset{\text{?}}{\text{konst}} = \lim_{z\to 0} \frac{\|(z-A)^{-1}\|}{|z|^{-k}} \le \lim_{z\to 0} \frac{|z|^{-1}\cdot}{|z|^{-k}} \sum_{m=0}^{\infty} \|(z^{-1}A)^m\| \le \lim_{z\to 0} \frac{|z|^{-1}\cdot}{|z|^{-k}} \sum_{m=0}^{\infty} |z|^{-m} \cdot \|A^m\|$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \lim_{z\to 0} \frac{|z|^{-(m+1)}}{|z|^{-k}} \cdot \|A^m\| \;\underset{k>m+1}{\overset{\text{nulový}}{\underset{\lim}{=}}}\; \underbrace{\sum_{m=k-1}^{\infty} \lim_{z\to 0} \frac{|z|^{-(+m+1)}}{|z|^{-k}} \cdot \|A^m\|}_{\text{potřebujeme aby konvergovalo}}$$

$$\xRightarrow{\text{AK}} \quad \|A^k\| = 0, \text{ což jsme chtěli.} \qquad \overset{A^k = 0}{\Uparrow}$$

Předpokládejme nyní, že $A^k = 0$ pro nějaké k. Definujme $M := \sup_{\ell \ge 0} \|A^\ell\|$ a pro $z \neq 0$ definujme $r = |z|$ a $K = \frac{r}{2}$. Pak z odhadu (16.18) plyne $K = \frac{r}{2} \cdot \|(z-A)^{-1}\|$ a pro $|z| < 2$ tento odhad dává $K < M\left(\frac{r}{2}\right)^{1-k}$. Tudíž pro $z \to 0$ je $\|(z-A)^{-1}\| = O(|z|^{-k})$.

$$\frac{r}{2}\cdot\|(z-A)^{-1}\| < M \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^{1-k}$$

konst.