Toeplitzovy matice

Definice: Toeplitzova matice $N \times N$ je matice, jejíž prvky jsou konstantní podél diagonále, tj.

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdots & \cdots & a_{1-N} \\ a_1 & a_0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_0 & a_{-1} \\ a_{N-1} & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Matici, která je v jednom směru „nekonečná" a má stejný tvar jako A, nazýváme Toeplitzův operátor. Je-li v obou směrech „nekonečná", nazýváme ji jako Laurentův operátor. Dále definujeme cirkulační matici jako Toeplitzovu matici s tím, že $a_j = a_{j-N}$ pro $1 \leq j \leq N-1$.
tj.

$$A_C = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdots & \cdots & a_{1-N} \\ a_{1-N} & a_0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_0 & a_{-1} \\ a_{-1} & \cdots & \cdots & a_{1-N} & a_0 \end{pmatrix}$$

, jde o analogii Laurentova operátoru v konečné dimenzi.

Dále definujeme symbol Toeplitzovy matice, nebo Toeplitzova (Laurentova) operátoru jako funkci $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_k a_k z^k$, přičemž je suma dle kontextu konečná, nebo nekonečná.

Příklad pro $N=6$ položme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2i & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 2i & -1 & 2 \\ -2i & -4 & 0 & 0 & 2i & -1 \\ 0 & -2i & -4 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & -2i & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ozn. } (7.3)$$

Této matici A je tedy přiřazen symbol $f(z) = 2z^{-3} - z^{-2} + 2iz^{-1} - 4z^2 - 2iz^3$ ozn (7.4)

V obecném případě budeme předpokládat, že vektor $\mathbf{a} = (a_j)$ definující Toeplitzův, nebo Laurentův operátor je v $\ell^2(\mathbb{Z})$, což zajišťuje, že $f \in L^2(\mathbb{T})$, kde $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$. Dále budeme rovněž předpokládat, že f je na $\mathbb{T}$ spojitá.

To zajistí, že operátor A je omezený.

Pokus o důkaz: Z Parsevalovy rovnosti pro $f \in L^2([0,2\pi])$ víme, že platí $\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$, kde $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$. Máme tedy izometrii ϕ danou takto:

$$\varphi \in L^2([0,2\pi]) \xleftarrow{\phi} \hat{\varphi} \in \ell^2(\mathbb{Z}), \text{ tj. } \varphi \xrightarrow{\phi^{-1}} \left(\frac{\langle \varphi, e^{-ik\cdot} \rangle}{2\pi} \right)_{k\in\mathbb{Z}} \text{ a}$$

naopak pro $(a_k) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ máme $(a_k) \xrightarrow{\phi} \sum_k a_k e^{ikx}$.

tj. idea je:

$$\begin{array}{l} A : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \quad\quad \uparrow \phi^{-1} \qquad\qquad\quad \downarrow \phi \\ \tilde{A} : L^2([0,2\pi]) \longrightarrow L^2([0,2\pi]) \end{array}$$

Nechť $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$, pak $(Au)_k = \underset{\text{diskrétní}}{(a * u)_k} = \sum_j a_{k-j} u_j$. Dále tedy

$$\phi(A(u)) \underset{\text{def.}}{=} \sum_k e^{ikx} \sum_j a_{k-j} u_j \underset{\substack{\text{(za nějakých}\\\text{předpokladů)}}}{=} \sum_{k,j} a_{k-j} e^{i(k-j)x} u_j e^{ijx} = \underbrace{\phi(a)}_{f} \cdot \phi(u).$$

To motivuje zavést operátor $\tilde{A} : L^2([0,2\pi]) \to L^2([0,2\pi])$, $\tilde{A}\varphi = f \cdot \varphi$, $\varphi \in L^2([0,2\pi])$, přičemž pokud $f \in L^\infty([0,2\pi])$, tak pak triviálně platí, že $\tilde{A}$ je omezený. Což za předpokladu spojitosti f platí! Pokud by platilo

$$\begin{array}{l} A: X \longrightarrow X \\ \quad \downarrow \phi \qquad \uparrow \phi^{-1}, \\ B: Y \longrightarrow Y \end{array}$$

pak $A = \phi^{-1} B \phi$, tj. v našem případě bychom měli $A = \phi^{-1} \tilde{A} \phi$. Pak $\|A\| \leq \|\phi^{-1}\| \|\tilde{A}\| \|\phi\|$.

Také by se snadno nalezlo spektrum A: $(\lambda I - A)$ je invert. $\Leftrightarrow$ $\phi(\lambda - A)\phi^{-1} = \lambda - B$ také. Tedy stačilo by hledat spektrum $\tilde{A}\varphi = f\varphi$ na $L^2([0,2\pi])$ pro pevné $f \in L^2([0,2\pi])$, přičemž se dá ukázat, že pro spojité f je $\sigma(\tilde{A}) = f([0,2\pi])$. Obecně skutečně platí, že jednak je Laurentův operátor A normální a hlavně $\sigma(A) = f(T)$.

$f(T)$ je zjevně uzavřená křivka a dále budeme označovat jako $I(f,\lambda)$ index bodu $\lambda \in \mathbb{C}$ k této křivce. Pro $\lambda \in f(T)$ je $I(f,\lambda)$ nedefinováno. Označme nyní ještě T_N jako ~~množina~~ množina všech N-tých odmocnin z 1.

Platí následující zajímavé tvrzení:

<u>Věta</u> Ať A je cirkulující matice, nebo Laurentův operátor, nebo Toeplitzův operátor se spojitým symbolem f.

(i) Je-li A cirkulující matice $(N\times N)$, pak $\sigma(A) = f(T_N)$.

(ii) Je-li A Laurentův operátor, pak $\sigma(A) = f(T)$

(iii) Je-li A Toeplitzův operátor, pak $\sigma(A)$ je rovno $f(T)$ spolu se všemi body, které jsou uzavřené křivkou $f(T)$ ($\mathrm{Int}\, f(T)$) s nenulovým indexem.

---

viz příklady

<u>Poznámka</u> Pro Toeplitzovy matice neexistuje žádná snadná charakterizace vlastních čísel. V aplikacích jsou však důležité zejména Toeplitzovy operátory, přičemž jejich spektrum úzce souvisí s pseudospektrem korespondujících Toeplitzových matic A_N pro velká N.

<u>k bodu (iii)</u>: Ať A je Toeplitzův operátor se spojitou f a ať $\lambda \in \mathbb{C}$ pro které platí $I(f,\lambda) < 0$. Pak platí, že nejenže $\lambda \in \sigma(A)$, ale dokonce $\lambda \in \sigma_p(A)$ s tím, že pro korespondující vlastní vektor $u = (u_j)$ platí, že $|u_j| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$. Dokonce exponenciálně pro dostatečně hladké f.

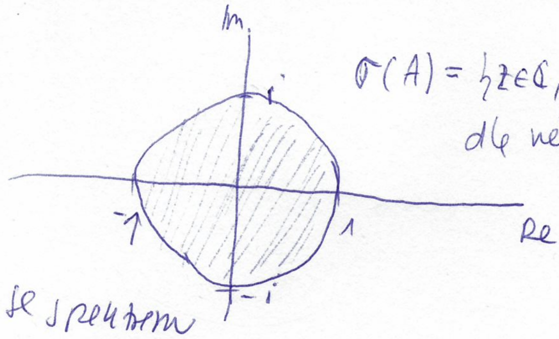
Ať nyní $\lambda \in \mathbb{C}$ pro které je $I(f,\lambda) > 0$. Pak výše zmíněné neplatí, ale pro operátor A^T („nekonečná transpozice") to platí: A^T je také Toeplitzův se spojitým symbolem $f(z^{-1})$ (to plyne přímo z definice f), a tedy se křivka probíhá „opačným směrem", tj. u indexů se obrací znaménka. Protože $\sigma(A) = \sigma(A^T)$, tak i $\lambda \in \sigma(A)$.

příklad Ať

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & 0 \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & \ddots \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

, tj. „nekonečný" Jordanův blok, operátor posunu.

pak symbol je $f = \frac{1}{z}$. Aplikujeme-li A na vektor $u = (1, z^{-1}, z^{-2}, \dots)^T$ pro ~~z~~ z $0 < |z| \leq \infty$, pak se ověří, že platí $Au = z^{-1}u$. Je-li nyní $|z| > 1$, pak $u \in \ell^2$, tedy u je vlastní vektor s vlastním číslem $\lambda = z^{-1}$.



$\sigma(A) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$. dle věty.

Pokusíme se nyní nahlédnout, proč je problém se spektrem Toeplitzova operátoru a Toeplitzovy matice A_N. Provedeme podobnostní transformaci pomocí matice

$$P_N = \begin{pmatrix} r & & & 0 \\ & r^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & r^N \end{pmatrix}$$

pro nějaké pevné $r > 0$. Pak se ověří, že výsledná matice $P_N A_N P_N^{-1}$ je rovněž Toeplitzova a navíc má stejná vlastní čísla jako matice A_N $\left(\det(\lambda I - P_N A_N P_N^{-1}) = \det(\lambda P_N P_N^{-1} - P_N A_N P_N^{-1}) = \det(\lambda I - A_N) \right)$. Avšak nyní se symbolem $f_r(z) = f(rz)$. Tedy spektrum příslušného Toeplitzova operátoru je $f(rT)$ spolu se všemi body, které mají nenulový index vzhledem k této křivce. Zkrátka tedy: tato operace mění spektrum Toeplitzova operátoru, ale nemění vlastní čísla A_N.

Nyní konečně k pseudospektru: Pro Toeplitzovu matici A_N platí slavný následující:

Každé $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že $\lambda \in \operatorname{Int} f(T)$ s nenulovým $I(f, \lambda)$ je exponenciálně „dobré" pseudovlastní číslo A_N.

Definice: Pojmem banded matrix budeme rozumět matici, která má všude nuly až na „ohraničenou" oblast kolem diagonály. Pojmem semi-banded matrix rozumíme matici takovou, že $a_j = 0$ pro $j > k$.

Věta Ať $\{A_N\}$ jsou banded, nebo semi-banded Toeplitzovy matice a ať $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že $I(f,\lambda) \neq 0$. Pak pro nějaké $M > 1$ a všechna dostatečně velká N platí $\|(\lambda I - A_N)^{-1}\| \geq M^N$ a existuje nenulový pseudovlastní vektor $v^{(N)}$ splňující

$$\frac{\|(A_N - \lambda)v^{(N)}\|}{\|v^{(N)}\|} \leq M^{-N} \quad \text{s tím, že} \quad \frac{|v_j^{(N)}|}{\max\limits_j |v_j^{(N)}|} \leq \begin{cases} M^{-j} & \text{if } I(f,\lambda) < 0 \\ M^{j-N} & \text{if } I(f,\lambda) > 0 \end{cases} \quad 1 \leq j \leq N.$$

Věta Ať A je Toeplitzův operátor se spojitým symbolem f a ať $\{A_N\}$ jsou jemu přiřazené Toeplitzovy matice. Pak pro všechna $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{N \to \infty} \sigma_\varepsilon(A_N) = \sigma_\varepsilon(A) \quad , \text{ a tedy}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{N \to \infty} \sigma_\varepsilon(A_N) = \sigma(A).$$

přičemž konvergence v této větě je ve smyslu Hausdorffovy metriky,

tj. pro metrický prostor (M,d) a $X, Y \subseteq M$ rozumíme Hauss. metrikou

$$d_H(X,Y) = \max\left\{\sup_{x \in X} d(x,Y), \sup_{y \in Y} d(X,y)\right\}, \text{ kde } d(x,Y) = \inf_{y \in Y} d(x,y).$$