4. Pseudospectra of linear operators

- zobecnění pro operátory na Banachových prostorech
- X bude značit komplexní Banachův prostor s normou $\|\cdot\|$

$A : X \to X$ lineární operátor, $\mathcal{D}(A)$ ... definiční obor A, $\mathcal{D}(A) \subset X$

$\mathcal{B}(X)$ ... omezené operátory na X, $\mathcal{C}(X)$ ... uzavřené operátory

$$\Big(\underset{\mathcal{D}(A)}{\overset{\cap}{u_k}} \xrightarrow{k\to\infty} \underset{X}{\overset{\cap}{u}}, \quad A u_k \xrightarrow{k\to\infty} \underset{X}{\overset{\cap}{v}} \implies u \in \mathcal{D}(A) \wedge Au = v \Big)$$

- densely defined (hustě definován): $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$

Pozn: Je-li $A \in \mathcal{C}(X)$ a $E \in \mathcal{B}(X)$, pak $A+E \in \mathcal{C}(X) \wedge \mathcal{D}(A+E) = \mathcal{D}(A)$. Speciálním případem je E násobek identity. Tudíž perturbace uzavřených operátorů nějakým omezeným operátorem nám nebudou dělat technické potíže.

Def.: Pro $A \in \mathcal{C}(X)$ definujeme omezený inverzní operátor $A^{-1} \in \mathcal{B}(X)$:
$A A^{-1} = Id_X \wedge A^{-1} A = Id_{\mathcal{D}(A)}$

Věta 4.1 (Invertibilita a perturbace uzavřených operátorů).
Nechť $A \in \mathcal{C}(X)$, který má omezený inverz A^{-1}. Pak pro libovolné $E \in \mathcal{B}(X)$ s $\|E\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, má $A+E$ omezenou inverzi $(A+E)^{-1}$ splňující

$$\|(A+E)^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|E\|\,\|A^{-1}\|}. \qquad (1)$$

Naopak, je-li $\mu > \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, pak existuje $E \in \mathcal{B}(X)$ s $\|E\| < \mu$ takový, že $\underbrace{(A+E)u = 0}_{\text{tj. } A+E \text{ nemá omezený inverz.}}$ pro nějaké nenulové $u \in X$.

Důkaz: Invertibilita $A+E = (Id + EA^{-1})A$ se ukáže pomocí von Neumannova lemmatu, neb $\|EA^{-1}\| < 1$. Proto řada $\sum_{k=0}^{\infty} (-EA^{-1})^k$ konverguje k $(Id + EA^{-1})^{-1}$, aplikací Δ-ové nerovnosti pro normu na tuto sumu dostaneme pak po sečtení odhad (1).

Naopak: Z definice $\|A^{-1}\|$ existuje $u \in X$ s $\|u\| = 1$ takové, že $Au = v$, $\|v\| < \mu$ $\Big[\exists v \neq 0: \|A^{-1}v\| > \frac{1}{\mu}\|v\| \ \dots \Rightarrow \exists u \neq 0:$ volíme $A u = v \in Rng A$. $\|Au\| < \mu \|u\|$

Uvažujme $E \in \mathcal{B}(X)$ takový, že $E(u) = -v \wedge \|E\| = \|v\|$, takové E existuje podle Hahn-Banachovy věty

$\boxed{\begin{array}{l} \text{H-B: } v \in X, v \neq 0 \Rightarrow \exists\, x' \in X', \text{ že } \|x'\| = 1 \wedge x'(x) = \|x\| \\ \text{Definujeme } E(w) := \underbrace{-v \cdot x'_w(w)}_{} \quad \text{s } x' \text{ jako tady s } x = w \\ \text{Pak už } \|E\| = \|v\| \\ \text{a } E(u) = -v \cdot \underbrace{x'_u(u)}_{= \|u\| = 1} \end{array}}$

lineární to je, akorát se musí správně naladit ten funkcionál z H-B.

Teorii o rezolventách, spektru a pseudospektru dostaneme aplikací této věty na operátory $z\mathrm{Id} - A$ pro $z \in \mathbb{C}$.

pro $A \in \mathcal{C}(X)$ a $z \in \mathbb{C}$ nazýváme rezolventou operátor $(z\mathrm{Id}-A)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ pokud existuje

rezolventní množina $\rho(A)$ je $\{z \in \mathbb{C} : (z-A)^{-1} \text{ existuje}\}$

Dle V.4.1 je $\rho(A)$ otevřená. $(z\mathrm{Id}-A)^{-1}$ je analytická funkce proměnné $z \in \rho(A)$ (později)

Spektrum A: $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ .. $\sigma(A)$ je uzavřená

pro $A \in \mathcal{B}(X)$ je $\sigma(A)$ omezená a neprázdná.

Př. $A : u \mapsto u'$ pro $u \in AC([0,1])$ absolutně spojité $+ \; u(1) = 0$

? ~~$u \in C[0,1]$~~

pak $\sigma(A) = \emptyset$

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

$\sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) < \delta$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \varepsilon$

když nepožadujeme $u(1) = 0$, pak $\sigma(A) = \mathbb{C}$.

$Aw = \lambda w$ ... spektrum může obsahovat víc než jen vlastní čísla.

w vlastní vektor, λ vlastní číslo

Př. $A(u_1, u_2, \ldots) = (0, u_1, u_2, \ldots)$ na $\ell^2(\mathbb{N})$ má $\sigma(A) = \cancel{\ldots}\,1$ ale nemá žádné žádné vlastní vektory.

Př. $A(u_1, u_2, \ldots) = (u_2, u_3, \ldots)$ na $\ell^2(\mathbb{N})$ má $\sigma(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$

pro $|z| < 1$ vlastní vektory

$w_z = (z, z^2, z^3, z^4, \ldots)$

(Př) $A: u \mapsto u'$ s $\mathcal{D}(A) = AC([0,1])$ s $u(0) = u(1) = 0$
v $L^2([0,1])$

i když má $z\,Id - A$ inverzi, tato není všude definovaná

Totiž $A(\mathcal{D}(A)) = \{ f \in X : \int_0^1 e^{-zx} f(x)\,dx = 0 \}$

Pro dané $u \in \mathcal{D}(A)$, $z \in \mathbb{C}$ definujme $w \in \mathcal{D}(A)$ předpisem
$w(x) = -e^{-zx} \cdot u(x)$, pak $w'(x) = e^{-zx}(zw - u') = e^{-zx} v$

pak také $\underbrace{w(1) - w(0)}_{= \int_0^1 w'(x)\,dx} = 0 \Rightarrow v \equiv 0$

$v = (z - A)w$
w a $v \Rightarrow v = 0$

Tedy A nemá žádné vlastní číslo, ale $\sigma(A) = \mathbb{C}$.

Tvrzení 4.1 dává, že pro libovolné $A \in C(X)$ a $z \in \varrho(A)$

platí $\|(z - A)^{-1}\| \geq \dfrac{1}{dist(z, \sigma(A))}$

Dk: $z \in \sigma(A + E)$ kde $E = Id.\, e^{i\theta} dist(z, \sigma(A))$ pro nějaké $\theta \in [0, 2\pi)$, $\|(z-A)^{-1}\| \longrightarrow \infty$ pro $z \to \lambda \in \sigma(A)$

(z toho „naopak")

Konvence: pro $z \in \sigma(A)$ píšeme $\|(z-A)^{-1}\| = \infty$.
Tato konvence a skutečnost, že $\|(z-A)^{-1}\|$ je spojitá funkce na celém $\mathbb{C}$ do $(0, \infty]$ nám umožní formulovat tvrzení o rezolventě a perturbacích. Z V.4.1 a předchozích pozorování plyne

<u>Věta 4.2</u> (Norma rezolventy) Je-li dáno $A \in C(X)$ s $\|(z-A)^{-1}\|$ definovanou jako ∞ pro $z \in \sigma(A)$. $f(z) := \|(z-A)^{-1}\|$, $f: \mathbb{C} \to (0, \infty]$ s následujícími vlastnostmi. Je spojitá a neomezená a nabývá hodnotu ∞ právě v $z \in \sigma(A)$. Pro $z \notin \sigma(A)$ je subharmonická a splňuje princip maxima a také

$$\|(z - A)^{-1}\| \geq \frac{1}{dist(z, \sigma(A))}$$

Jestliže $z \notin \sigma(A)$, pak $z \notin \sigma(A+E)$ pro každé $E \in \mathcal{B}(X)$ které splňuje $\|E\| < \frac{1}{\|(z-A)^{-1}\|}$. Obráceně, pro libovolné $\mu > \|(z-A)^{-1}\|^{-1}$ existuje $E \in \mathcal{B}(X)$ s $\|E\| < \mu$, že $(A+E)w = zw$ pro nějaké nenulové $w \in X$.

„Infinitezimální perturbace A může $\sigma(A)$ zvětšit pouze infinitezimálně." (shora-polospojitost spektra)

„Infinitezimální perturbace A může změnit/zmenšit $\sigma(A)$ konečně" (zdola-polonespojitá)

Př

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ & 0 & 1 & & 0 \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & \ddots \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

pak $\sigma(A) = \{\|z\| \leq 1\}$

$$A+E = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & & & \\ & 0 & 1 & & 0 \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Podobně jako pro matice můžeme zavést pseudospektrum pomocí tří ekvivalentních definic i pro operátory na BP. Tvrzení bylo dokázáno jejich publikacemi a tak uvedu jen odkazy na ně.

Definice (pseudospektra): Nechť $A \in \mathcal{C}(X)$ a $\varepsilon > 0$ libovolné. ε-pseudospektrum $\sigma_\varepsilon(A)$ je množina $z \in \mathbb{C}$ definovaná ekvivalentně následujícími podmínkami:

(2) $\|(z-A)^{-1}\| > \varepsilon^{-1}$

(3) $z \in \sigma(A+E)$ pro nějaké $E \in \mathcal{B}(X)$ s $\|E\| < \varepsilon$

(4) $z \in \sigma(A)$ nebo $\|(z-A)u\| < \varepsilon$ pro $u \in \mathcal{D}(A)$, $\|u\| = 1$

Jestliže $\|(z-A)w\| < \varepsilon$, pak z nazýváme ε-pseudovlastní číslo A a w odpovídající ε-pseudovlastní vektor.

Shrnutím předchozích poznatků o pseudospektru dostaneme

Věta 4.3 (vlastnosti pseudospektra): Dáno $A \in \mathcal{C}(X)$.
Pseudospektra $\{\sigma_\varepsilon(A)\}_{\varepsilon>0}$ mají následující vlastnosti. Mohou být ekvivalentně definována pomocí (*) - (***). Každé $\sigma_\varepsilon(A) \neq \emptyset$, a libovolná omezená komponenta $\sigma_\varepsilon(A)$ má $\sigma_\varepsilon(A) \cap \sigma(A) \neq \emptyset$. Pseudospektra jsou do sebe striktně zanořena tj. $\sigma_\varepsilon(A) \subset \sigma_{\tilde{\varepsilon}}(A)$, je-li $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$. a $\bigcap_{\varepsilon>0} \sigma_\varepsilon(A) = \sigma(A)$. Obráceně, pro libovolné $\delta > 0$ je

$\sigma_{\varepsilon+\delta}(A) \supseteq \sigma_\varepsilon(A) + \Delta_\delta$, kde $\Delta_\delta = B(0,\delta)$ otevřená koule o poloměru δ.

Zatím jsme v teorii nepotřebovali adjungované operátory, ale v praxi se často vyskytují, proto uvedeme shrnutí hlavních faktů.

- X BP, ~~konjugovaným~~ (adjungovaným) prostorem / duálním prostorem nazýváme X^* všech lineárních funkcí s.t. $f(\alpha u) = \bar{\alpha} \cdot f(u)$ $\forall u \in X$ $\forall \alpha \in \mathbb{C}$. ale se skalárním součinem
- $f(u) = \langle f, u \rangle$ ... typicky se zapisuje jako skalární součin.
- $\forall u \in X$: $\|u\| = \sup_{f \in X^*, \|f\|=1} |\langle f, u \rangle|$ a existuje f pro které je tohoto suprema nabyto.
- $(\ell^p)^* = \ell^q$ pro $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a $1 \le p < \infty$
- E kompaktní v $\mathbb{C}$: $(L^p(E))^* = L^q(E)$
- adjungovaným (duálním) operátorem k $A \in \mathcal{C}(X)$ nazýváme $A^* \in \mathcal{C}(X^*)$ splňující $\langle f, Au \rangle = \langle A^* f, u \rangle$ $\forall f \in \mathcal{D}(A^*)$ a $u \in \mathcal{D}(A)$.
- každý operátor A má adjungovaný, A^* je určeno jednoznačně a je uzavřený operátor.
- $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$
- $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \|A\| = \|A^*\|$ $A \in \mathcal{C}(X)$ má $A^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ pak A^* má inverzi $(A^*)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ a $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* =: A^{-*}$ proto také $\|A^{-1}\| = \|A^{-*}\|$

Věta 4.4: (pseudospektrum adjungovaného operátoru)
Pro libovolné $A \in \mathcal{C}(X)$, $z \in \mathbb{C}$ a $\varepsilon > 0$ platí:

$$\|(\bar{z} - A^*)^{-1}\| = \|(z-A)^{-1}\| \,; \qquad \sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$$

$$\text{a} \qquad \sigma_\varepsilon(A^*) = \overline{\sigma_\varepsilon(A)}$$

Navíc, pokud A má ε-pseudovlastní vektor $u \in \mathcal{D}(A)$ příslušný ε-pseudovlastnímu číslu z a ($z \notin \sigma(A)$), pak A^* má ε-pseudovlastní vektor odpovídající ε-pseudovlastnímu číslu $\bar{z}$. [$v \in \mathcal{D}(A^*)$]

nelze vynechat Th. 11.3

Uvidíme, že adjungované operátory budou klíčové při určení numerického ~~spektra~~ oboru (Ran) operátoru. § 14, 17

---

5. Příklad operátoru

- příklad Schrödingerova operátoru
- studujeme ale jednodušší operátor $Au = u'$ v $L^2(0,d)$ s $u(d) = 0$ ... $\sigma(A) = \emptyset$, uvážíme že $(z-A)^{-1}$ existuje a je omezený:

$$(z-A)^{-1} v(x) = \int_x^d e^{z(x-s)}\, v(s)\, ds \qquad (5)$$

$\quad$ ↳ odvozeno z ODE $\underbrace{zu - u'}_{= (z-A)u} = v$

Pseudospektrum ale vypadá úplně jinak!
$\quad$ ... z (5) plyne, že $\|(z-A)^{-1}\|$ je obrovská pro $\operatorname{Re} z < 0$.

Proč je ale norma té rezolventy velká?

1) ... $u(x) := e^{zx}$, $z \in \mathbb{C}$ téměř splňuje $u(d) = 0$
„téměř vlastní funkce", ale perturbovaného problému

$$\tilde{u}(x) := e^{zx} - e^{d \operatorname{Re} z + ix \operatorname{Im} z}$$

Úloha 5.1 (Pseudospektrum diferenciálního operátoru)

Spektrum operátoru $A: u \mapsto u'$ je prázdná množina. Norma rezolventy $\|(z-A)^{-1}\|$ závisí na $\mathrm{Re}\, z$ ale ne na $\mathrm{Im}\, z$ a splňuje

$$\|(z-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\, z} \quad \text{pro } \mathrm{Re}\, z > 0 \text{ a}$$

$$\|(z-A)^{-1}\| = \frac{e^{d|\mathrm{Re}\, z|}}{2 \cdot |\mathrm{Re}\, z|} + O\left(\frac{1}{|\mathrm{Re}\, z|}\right) \quad \text{pro } \mathrm{Re}\, z < 0,$$

kde konstanta O nezávisí na z ani na d. Pseudospektrum A jsou poloroviny tvaru

$$\sigma_\varepsilon(A) = \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z < c_\varepsilon \}, \text{ kde}$$

$$c_\varepsilon \approx \begin{cases} \frac{\log(\varepsilon)}{d}, & \text{pro } \varepsilon \to 0 \\ \varepsilon, & \text{pro } \varepsilon \to \infty \end{cases}$$

Důkaz: Nechť $u = (z-A)^{-1} r(x)$, pak (asi běžně $r > 0$)

$$\|u\| = \left\| \int_x^d e^{z(x-s)} \cdot r(s)\, ds \right\| \leq \left\| \int_0^d e^{z(x-s)} \cdot r(s)\, ds \right\| =$$

$$= \| r * g \| \overset{\text{Fourier. transf.}}{=} \| \widehat{r * g} \| = \| \hat{r} \cdot \hat{g} \| \leq \| \hat{r} \| \cdot \sup_{w \in \mathbb{R}} |\hat{g}(w)|$$

konvoluce s $g(s) = e^{zs}$

$$= \| r \| \cdot \sup_{w \in \mathbb{R}} |\hat{g}(w)|$$

Spočte se, že $\hat{g}(w) = \frac{e^{d(iw-z)} - 1}{iw - z}$ a maximum se pak nabyde v $\mathrm{Im}\, z = w$.

$$\sup_{w \in \mathbb{R}} |\hat{g}(z)| = \left| \frac{e^{-d \mathrm{Re}\, z} - 1}{|\mathrm{Re}\, z|} \right|$$

>0

Tedy $\|(z-A)^{-1}\| \leq \frac{1 - e^{-d \mathrm{Re}\, z}}{\mathrm{Re}\, z}$, $\mathrm{Re}\, z > 0$

$$\leq \frac{1}{\mathrm{Re}\, z} \ldots \text{ odtud tvrzení.}$$

Pro $\mathrm{Re}\, z < 0 \ldots$

$$(z-A)^{-1} r(\cdot) = R_1 r(x) - R_2 r(x) := \int_0^d e^{z(x-s)} r(s)\, ds - \int_0^x e^{z(x-s)} r(s)\, ds$$

$$(A): \quad \|R_1\| - \|R_2\| \leq \big| \|R_1\| - \|R_2\| \big| \leq \|(z-A)^{-1}\| \leq \|R_1\| + \|R_2\|$$

$\|R_2\| < \frac{1}{-\operatorname{Re} z}$ ... stejně jako předtím

R_1 spočítáme přesně: $R_1 v(x) = e^{zx} \int_0^d e^{-zs} v(s)\,ds$

nezávisí na v

tj.: $\frac{\|R_1 v\|}{\|v\|}$ je maximalizováno

$\iff \frac{|R_1 v(0)|}{\|v\|}$ je maximalizováno

Cauchy-Schwartz (kdy nastává rovnost) $|\langle u,v\rangle|^2 \le \langle u,u\rangle \cdot \langle v,v\rangle$

$$\left(\int_0^d e^{-zs} \cdot v(s)\,ds\right)^2 = \int_0^d |e^{-zs}|^2 ds \cdot \underbrace{\int_0^d |v(s)|^2 ds}_{=\|v\|^2}$$

$\iff v = e^{-\bar{z}s}$

odtud dostaneme: $\|R_1\| = \frac{\|R_1 v\|}{\|v\|} = \frac{|R_1 v(0)|}{\|v(d)\|} =$

$$= \frac{\int_0^d e^{-2s\operatorname{Re} z} ds}{e^{-d\operatorname{Re} z}} = \frac{e^{-2d\operatorname{Re} z} - 1}{-2\operatorname{Re} z \cdot e^{-d\operatorname{Re} z}}$$

Zkombinujeme s předchozími odhady:

U matic dávalo pseudospektrum vhled do toho, jak vypadají $\|A^k\|$, u abstraktního problému to bude $\|e^{tA}\|$.

A není omezený ... e^{tA} nelze definovat jako řešení $\frac{du}{dt} = Au$

... lze jako řešení $u_t = u_x$ na $(0,d)$

s b.c. $u(d) = 0$

řešení:

$$e^{tA} u(x) = \begin{cases} u(x+t); & x+t < d \\ 0, & x+t \ge d \end{cases}$$

je pak omezený na $L^2(0,d)$