1. Vlastní čísla

Spousta literatury a aplikací.

$A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ ... $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$, $\vec{u} \in \mathbb{C}^N$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (obecně komplexní)

$\sigma(A) = \{ z \in \mathbb{C};$ ~~z~~ $z - A$ není sing, tj. $(z-A)^{-1}$ neexistuje $\}$

Má-li N vl. různých čísel ... $AU = UD$ ($A\vec{u_k} = \lambda_k \vec{u_k}$)

Tedy přechodová matice. Můžeme tedy pracovat v bázi ve které je A reprezentována diag. operátorem. Což je bezva (mocniny, e^{tA})

$$A^k = U D^k U^{-1}$$

Pro operátory obdobné, ale zatím nepotřebujeme. A uz. op. na BS.

$\sigma(A) = \{ z;\ (zI - A)^{-1}$ neex. jako omezený op. na celém prostoru $\}$

⇝ problém vl. čísla $\neq$ spektrum

↪ σ_p

Pak je tu historie

K čemu jsou dobrá?

- Báze ... viz PDE, Galerkin
- Resonance ... tj. větší kmity pro jisté frekvence
  ⇝ struny, bubny, stavby (Tacoma bridge 1940)
- Asymptotická stabilita ... viz ODE, nebo iterace z minula
- Dávají matici osobnost (⇝ vizualizace toho, co ta matice dělá.

Co budeme zkoumat?

Problémy u kterých nemusí vl. čísla stačit (proto zobecnění)

Tedy v zásadě případy, kdy $\|U^{-1}\| \gg 1$ (pokud existuje)

tedy U^{-1} obsahuje "velké" prvky.

Pokud neuděláme nějaké škálování $\|U\|$, tak zkoumáme

$\|U\|\,\|U^{-1}\| \gg 1$ pro libovolnou U z vl. vektorů.

Záleží na volbě normy

Prakticky budeme používat $\|A\|_2 = \max_{\vec{x}\neq 0} \frac{\|A\vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_2}$ (operátorová norma)

$= \sqrt{\lambda_{max}(A^*A)}$ $\quad A^* = (\bar{A})^T$

největší singular value

Pro normální matice je $\|U\|_2\|U^{-1}\|_2 = 1$.

Tedy "míra" nenormality. Měříme nenormalitu

Mnoho případů obsahuje vl. vektory, které jsou aspoň "téměř" kolmé, tedy U je "skoro" normální.

2. Pseudospektrum

Otázka: Je A singulární? Malá změna může změnit odpověď.

Praktičtější: Je $\|A^{-1}\|$ velká?

z vl. číslo A? ⇝ $\|(z-A)^{-1}\|$ je velká?

Obecně

Def 1.

$A\in\mathbb{C}^{N\times N}$ a $\varepsilon>0$, pak ε-pseudospektrum $\sigma_\varepsilon(A)=\{z\in\mathbb{C}\,;\ \|\overbrace{(z-A)^{-1}}^{\text{resolventa}}\|>1/\varepsilon\}$

Konvence: $z\in\sigma(A)$, pak $\|(z-A)^{-1}\|=\infty$. Tedy $\sigma(A)\subset\sigma_\varepsilon(A)$.

Pozn: σ_ε závisí na normě

$\sigma_\varepsilon(A)$ je otevřená ... $\|\cdot\|$ je l.s.c. („ne" slabě)

Později příklad

~~Def 2.~~

~~$\sigma_\varepsilon(A)$ $\varepsilon>0$~~

Věta 2.1.

Pro $A\in\mathbb{C}^{N\times N}$ platí, že ε-pseudospektrum A je

(i) $\sigma_\varepsilon(A)$ (Def 1)

(ii) $\{z\in\mathbb{C}\,;\ z\in\sigma(A+E),\ E\in\mathbb{C}^{N\times N},\ \|E\|<\varepsilon$ nějaké $\}$ (Def 2)

(iii) $\{z\in\mathbb{C}\,;\ \|(z-A)\vec{u}\|<\varepsilon$ pro nějaký $\vec{u}\in\mathbb{C}^N,\ \|\vec{u}\|=1\}$. (Def 3)

Dk. Pro $z\in\sigma(A)$ je vše triviální. Ať $z\notin\sigma(A)$, tj. $(z-A)^{-1}$ existuje.

~~(ii ⇒ iii)~~

(ii) ⇒ (iii)

Je $(A+E)\vec{u}=z\vec{u}$, $\|E\|<\varepsilon$. Znormujeme, aby $\|\vec{u}\|=1$. ($\vec{u}\neq 0$).

Pak $\|(z-A)\vec{u}\|=\|E\vec{u}\|<\varepsilon$.

(iii) ⇒ (i)

Je $(z-A)\vec{u}=\sigma\vec{v}$, $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=1$, $\sigma<\varepsilon$

$\Rightarrow (z-A)^{-1}\vec{v}=\frac{1}{\sigma}\vec{u} \Rightarrow \|(z-A)^{-1}\|>\frac{1}{\sigma}>\frac{1}{\varepsilon}$.

(i) ⇒ (ii)

Máme $(z-A)^{-1}\vec{v}=\frac{1}{\sigma}\vec{u}$ pro $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=1$, $\sigma<\varepsilon$

Tedy $z\vec{u}-A\vec{u}=\sigma\vec{v}$. Hledáme E ... $E\vec{u}=\sigma\vec{v}$ ⇝ $z\vec{u}=(A+E)\vec{u}$

Berme $E=\sigma\vec{v}(\vec{w})^*$, $\vec{w}\in\mathbb{C}^N$, že $\vec{w}^*\vec{u}=1$.

Pro $\|\cdot\|_2$ ... $\vec{w}=\vec{u}$. Obecněji hledám lin. op. T: $\|T\vec{u}\|=1$, $\|T\|=1$.

To je ale důsledek ~~Bana~~ Hahn-Banacha ($x\in X$ ... $\exists x^*\in X^*$: $\|x^*\|=1$ a $x^*(x)=\|x\|$

Pozn.

z resp. $\vec{u}$ z (Def 3) je ε-pseudo vlastní číslo resp. vektor matice A

Pozn.

Pro libovolnou A je $\sigma_{\varepsilon_1}(A) \subset \sigma_{\varepsilon_2}(A)$, $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$

neboť pro menší ε je méně povolených hodnot.

$$\sigma(A) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_\varepsilon(A).$$ Obr. 2.3.

~~Pozn.*)~~ **Pozorování 1**

Pro libovolnou $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ je $\sigma(A) + B_\varepsilon \subset \sigma_\varepsilon(A)$, $\forall \varepsilon > 0$.

Dk.

$\lambda \in \sigma(A)$ i pak $\lambda + z \in \sigma(A + z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. A $\|zI\| = |z|$.

Dle (Def 2) je $E := zI$, tj. $\lambda + z \in \sigma(A + E)$, což je RHS.

Ne tak obecně

Zaměříme se nyní na $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$.

Zde je norma určena singulárním číslem $\|A\|_2 = s_{max} = \sqrt{\lambda_{max} A^* A}$

Tedy $\|(z - A)^{-1}\|_2 = \dfrac{1}{s_{min}(z - A)}$.

To je jasné:

$\|M^{-1}\|_2^2 = \lambda_{max} (M^{-1})^* M^{-1} = \lambda_{max} (MM^*)^{-1}$

$S = AA^*$ Hermitovská, normální $\exists D \subset \mathbb{R}^{N \times N}$, že

$S = UDU^*$ a $S^{-1} = (U^*)^{-1} D^{-1} U^{-1} = U D^{-1} U^*$.

Tedy $\lambda_{max} S^{-1} = \max_{i=1,..,N} \dfrac{1}{d_i} = \dfrac{1}{\min d_i} = \dfrac{1}{\lambda_{min} S}$.

Def 5.

$\sigma_\varepsilon(A) = \{z \in \mathbb{C};\ s_{min}(z - A) < \varepsilon\}$ ... vzhledem k $\|\cdot\|_2$.

Pozn.

$z \in \sigma_\varepsilon(A)$, tj. $\|(z - A)^{-1}\|_2 = \dfrac{1}{s_{min}(z - A)} > \dfrac{1}{\varepsilon} \iff$ Def 1 platí.

Pozn.

$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v})^* \vec{u}$ a $\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{\vec{u}^* \vec{u}}$

Pozorování 2

Pseudospektra je invariantní vůči unitárním transformacím.

Dk.

$$(z - UAU^*)^{-1} = (U(z-A)U^*)^{-1} = U(z-A)^{-1}U^*.$$

$$\|(z-UAU^*)^{-1}\| = \|(z-A)^{-1}\|, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Př. (pseudosp. normální matice).

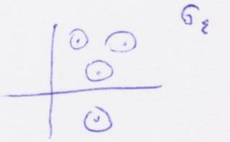
A normální ... $A = UDU^*$. Stačí zkoumat diagonální matici A.

Tedy $z - A$ je diag. a pro $z \notin \sigma(A)$ je $(z-A)^{-1}$ diag.

Tudíž $\|(z-A)^{-1}\|_2^2 = \lambda_{max}\left[(z-A)^{-1}\right]^2 = \max_i \dfrac{1}{(z-\lambda_i)^2}$

$$\Rightarrow \|(z-A)^{-1}\| = \frac{1}{dist(z, \sigma(A))}$$

Tedy



Pozn. $\|(z-A)^{-1}\|$ je velké, když z je blízko spektru (A normální). Obecně to tak být nemusí. Obr. 2.2.

Př. (pseud. pro nenormální)

$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ Jordanova buňka ... není diag., $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(z - J)^{-1} = \begin{pmatrix} z-\lambda & -1 \\ 0 & z-\lambda \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z-\lambda)^2}\begin{pmatrix} z-\lambda & 1 \\ 0 & z-\lambda \end{pmatrix}$$

Buď $\varepsilon > 0$, zkoumejme

$$\frac{1}{\varepsilon} < \|(z-J)^{-1}\|_2 = \frac{1}{|z-\lambda|^2}\sqrt{\frac{1}{2}\left[2|z-\lambda|^2 + 1 + \sqrt{4|z-\lambda|^2+1}\right]}$$

$$\begin{pmatrix} \bar a & 0 \\ 1 & \bar a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & \bar a \\ a & 1+|a|^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu \text{ vl. čísla}} (|a|^2 - \mu)(1+|a|^2-\mu) = |a|^2$$

$$\mu^2 - 2|a|^2\mu - \mu + |a|^4 = 0 \qquad a = z - \lambda$$

Označme $|z - \lambda| = A$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon^2}A^4 < 2A^2 + 1 + \sqrt{4A^2+1} \leadsto A \in (0, \sqrt{\varepsilon(\varepsilon+1)})$$

Tedy $z \in \sigma_\varepsilon(A) \Leftrightarrow |z - \lambda| < \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon} \Leftrightarrow z \in B_{\sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon}}(\lambda)$.

Věta 2.2.

Mějme $\|A\| = \|\cdot\|_2$. Pak A je normální $\iff \sigma_\varepsilon(A) = \sigma(A) + B_\varepsilon$.

Dk. „$\Rightarrow$" viz příklad

„$\Leftarrow$" Pomocí něčeho z kapitoly 52. A asi to není užitečné. ∎

Když A ~~není~~ je diagonalizovatelná, ale nenormální.

Máme opět matici U, ale není pěkná.

condition number: $\mathcal{K}(U) = \|U\|_2 \, \|U^{-1}\|_2 = \dfrac{s_{max}(U)}{s_{min}(U)}$

$\mathcal{K}(U) = 1 \iff A$ normální ... $1 \leq \mathcal{K}(U) < \infty$.

(To číslo je jednoznačné po normalizaci vektorů $\vec{u}_k$).

Věta 2.3 (Bauer-Fike)

Buď $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ diag., $A = UDU^{-1}$. Pak platí $\forall \varepsilon > 0$

$$\sigma(A) + B_\varepsilon \subset \sigma_\varepsilon(A) \subset \sigma(A) + B_{\varepsilon \mathcal{K}(U)}.$$

Dk. 1. inkluze z pozorování 1

2. inkluze:

Je-li $z \in \sigma_\varepsilon(A)$ ... $(z-A)^{-1} = (z - UDU^{-1})^{-1} = U(z-D)^{-1}U^{-1}$

$$\Rightarrow \|(z-A)^{-1}\| \leq \mathcal{K}(U) \, \|(z-D)^{-1}\|_2 \underset{\text{viz příklad}}{=} \frac{\mathcal{K}(U)}{dist(z, \sigma(D))} = \frac{\mathcal{K}(U)}{dist(z, \sigma(A))}$$

Dle (Def 1) je

$$\frac{1}{\varepsilon} < \frac{\mathcal{K}(U)}{dist(z, \sigma(D))} \iff dist(z, \sigma(A)) < \varepsilon \mathcal{K}(U).$$

∎

Pozn. Platí i něco obecnějšího.

Věta 2.4

Buď $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ a $\varepsilon > 0$. Potom platí:

(i) $\sigma_\varepsilon(A) \neq \emptyset$, otevřená, omezená s nejvýše N komponentami souvislosti, kde každá obsahuje aspoň jedno vl. číslo matice A.

(ii) $\sigma_\varepsilon(A + z) = z + \sigma_\varepsilon(A)$, $z \in \mathbb{C}$

(iii) $\sigma_{|z|\varepsilon}(zA) = z\,\sigma_\varepsilon(A)$, $z \in \mathbb{C}$

Je-li $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, pak ještě platí

(iv) $\sigma_\varepsilon(A^*) = \overline{\sigma_\varepsilon(A)}$ $\quad (= \{\bar{z} \in \mathbb{C};\ z \in \sigma_\varepsilon(A)\}.)$

(v) $\sigma_\varepsilon(A_1 \oplus A_2) = \sigma_\varepsilon(A_1) \cup \sigma_\varepsilon(A_2)$, $\quad A_1 \oplus A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$

Důk.

(i) neprázdnost, otevřenost je jasná

komponenty jasné nejsou ... $\log \|(z-A)^{-1}\|$ subharmonická fce

omezenost

(ii) Dle Def 2: $\sigma_\varepsilon(A+z) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda \in \sigma(A+zI+E),\ \|E\| < \varepsilon\}$.

$$= \{\lambda + z \in \mathbb{C};\ \lambda + z \in \sigma(A+E)\} = z + \sigma_\varepsilon(A).$$

(iii) $z \in \mathbb{C}$

$$z\,\sigma_\varepsilon(A) = z\,\{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda \in \sigma(A+E);\ \|E\| < \varepsilon\}$$
$$= \{z\lambda;\ \lambda \in \sigma(A+E);\ \|E\| < \varepsilon\}$$
$$= \{\mu \in \mathbb{C};\ \tfrac{\mu}{z} \in \sigma(A+E);\ \|E\| < \varepsilon\}$$
$$= \{\mu \in \mathbb{C};\ \mu \in \sigma(zA+zE);\ \|E\| < \varepsilon\}$$
$$= \{\mu \in \mathbb{C};\ \mu \in \sigma(zA+\tilde{E});\ \|\tilde{E}\| < |z|\varepsilon\} = \mu_{|z|\varepsilon}(zA)$$

(iv)

Ať $z \in \sigma_\varepsilon(A^*)$. Chci, že $\bar{z} \in \sigma_\varepsilon(A)$.

Tedy $s_{min}(z-A^*) < \varepsilon$.

Ale $[s_{min}(z-A^*)]^2 = \lambda_{min}(z-A^*)^*(z-A^*) = \lambda_{min}(\bar{z}-A)(z-A^*) =$

$$= \lambda_{min}(z-A^*)(\bar{z}-A), \text{ to chceme.}$$

(v).

$z \in \sigma_\varepsilon \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ ... chci $s_{min} < \varepsilon$

$$[s_{min}(z-A)]^2 = \lambda_{min}(\bar{z}-A^*)(z-A) = \lambda_{min}\left(\bar{z}I_{2n} - \begin{pmatrix} A_1^* & 0 \\ 0 & A_2^* \end{pmatrix}\right)\left(zI - \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \lambda_{min}\begin{pmatrix} \bar{z}I_n - A_1^* & 0 \\ 0 & \bar{z}I_n A_2^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} zI_n - A_1 & 0 \\ 0 & zI_n - A_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \lambda_{min}\begin{pmatrix} (\bar{z}I_n - A_1^*)(zI_n - A_1) & 0 \\ 0 & (\bar{z}I_n - A_2^*)(zI_n - A_2) \end{pmatrix}$$

$z \in \sigma_\varepsilon(A_1) \vee \sigma_\varepsilon(A_2)$

Kde žije matice? Pro normální stačí spektrum.

Pro ostatní se dá použít pseudospektrum (je to komplikace),

není to přesné. Nějaká aproximace.

Později uvidíme, jaké otázky nám to umožní zodpovědět.

3. Příklad

Tridiagonální matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & & \\ & 1/4 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$

$DAD^{-1} = S$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & \\ & 1/2 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$ symetrická, $D = \mathrm{diag}(2, 2^2, \dots, 2^N)$

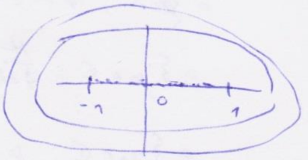
$\lambda_k(A) = \lambda_k(S) = \cos\frac{k\pi}{N+1}$, $k \in \{1, \dots, N\}$, $\sigma(A) \subset (-1, 1)$.

[Toeplitz matice ... $\lambda_k = a + 2\sqrt{bc}\cos\frac{k\pi}{N+1}$ $\quad a = 0, b = 1, c = 1/4$

Pseudospektrum je relativně daleko od spektra

Obr 3.1.

$\sigma_\varepsilon(A) \xleftarrow{\frac{1}{4}z + \frac{1}{z}} |z| = \varepsilon^{1/n}$

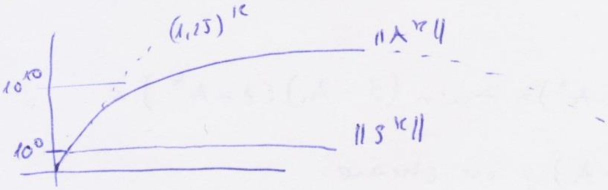


Něco z toho bude v části 7.

Na Obr 3.2 vl. čísla $A+E$, $\|E\| = 10^{-3}$
vyplňuje elipsu.

Kvalitativně stejné obrázky pro nižší ε.

Chování mocnin Obr. 3.4



Řekněme, že chceme odhadnout chování A^k. Tradičně přes vl. čísla.

Je $\rho(A) = \rho(S) = \cos\frac{\pi}{N+1} < 1 \dots$ $\|S^k\| \le C_S$, $\|A^k\| \le C_A$, $\forall k \ge 0$.
$\|S^k\|, \|A^k\| \to 0$

To má být pravda, ale z grafu vidíme, že to úplně dobře nepopisuje situaci

A^k roste exponenciálně pro $k < N$, dosáhne obrovské normy

Praktická informace nic moc

číslo 1.25 odpovídá "největšímu pseudo vl. číslu"

To dává ten nejhorší odhad (pro $k < N$ dost přesný)

$\rightsquigarrow$ bude to Pseudospektrální poloměr