# Seminář 7/5, Entropy

Stále máme rovnici tvaru

(1) $$-\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)\, u_{x_i}\right)_{x_j} = f \quad \text{na množině } U \subset \mathbb{R}^n,$$

kde $U$ je omezená, souvislá, otevřená a $\partial U$ je dost hladká.

$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $f: \bar{U} \to \mathbb{R}$, $u = u(x)$, $x \in \bar{U}$ hladké a kladné

## §A2b Bodový odhad

Předpokládejme, že $f \equiv 0$ na $U$ => ex. horní odhad na hodnotu $p$

z minula je $$p = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \frac{u_{x_i} u_{x_j}}{\underbrace{u^2}_{u>0}}$$ "local production of entropy"

a matice $A = (a^{ij})_{i,j}$ je eliptická, tj. $\sum a^{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2$

přičemž koeficienty $a^{ij}$ jsou rovněž hladké

Víme, že $p \geq 0$

**Věta 2**

Ať $f \equiv 0$ v $U$ a $V \subset \bar{V} \subset U$

Pak $\exists\, C = C(\operatorname{dist}(V, \partial U), a^{ij})$, že $\boxed{\sup_V p \leq C}$

pro všechna kladná řešení (1).

**Postup:**

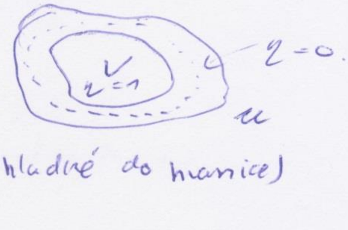
Entropie a poté vyjádření $p$. Dále derivace, nehezké členy budeme zahrnovat do výrazů $R_k$ v nichž budeme znát odhad pomocí 2., 1. derivací té nové fce po zavedení entropie.

Pak se počítá i druhá derivace $p$, odhady (Young, elipticita).

Poté se získá další odhad pomocí začáteční rovnosti pro $p$.

Pak se využije $V \subset \bar{V} \subset U$, tj. volba fce $\eta \in [0,1]$,

A derivace složeniny $\eta^4 \cdot p$ ...




Nakonec bude $\eta^4 p^2 \leq C$ v bodě $x_0$,

což bude maximum fce $\varphi$ vzhledem k $\bar{U}$ (vše hladké do hranice)

Dk. Mějme entropii $v = \log u$ ($u > 0$ libovolné řešení (1)).

(1) Víme, že platí $\sum_{i,j} (a^{ij} u_{x_i})_{x_j} = 0$ v $\cancel{\Omega}$ $U$. (rovnice)

tj. $u = e^v$, $u_{x_i} = e^v v_{x_i}$

$$0 = \sum_{i,j} (a^{ij} u_{x_i})_{x_j} = \sum \left(a^{ij} e^v v_{x_i}\right)_{x_j} = e^v \sum (a^{ij})_{x_j} v_{x_i} +$$

$$= \underbrace{e^v}_{>0} \sum (a^{ij})_{x_j} v_{x_i} + \sum a^{ij} \underbrace{e^v}_{>0} \left( v_{x_j} v_{x_i} + v_{x_i x_j} \right)$$

$$= \sum (a^{ij} v_{x_i})_{x_j} + \sum a^{ij} v_{x_j} v_{x_i}$$

$$\Rightarrow -\sum_{i,j} (a^{ij} v_{x_i})_{x_j} = \sum_{i,j} a^{ij} v_{x_j} v_{x_i} = \sum_{i,j} a^{ij} \frac{u_{x_j}}{u} \cdot \frac{u_{x_i}}{u} = \underline{\eta}$$

Tedy $\left(-\sum (a^{ij})_{x_j} v_{x_i}\right) + \left(-\sum a^{ij} v_{x_i, x_j}\right) = \eta \quad \Big/ \frac{\partial}{\partial x_k}$ v $U$

$$-\sum (a^{ij})_{x_j, x_k} v_{x_i} - \underline{\sum (a^{ij})_{x_j} v_{x_i, x_k}} - \sum (a^{ij})_{x_k} v_{x_i, x_j}$$
$$\underline{- \sum a^{ij} v_{x_i, x_j, x_k}} = \eta_{x_k}$$

$$\underline{-\sum a^{ij} v_{x_i, x_j, x_k} - \sum (a^{ij})_{x_j} v_{x_i, x_k}} = \eta_{x_k} + R_1, \qquad \underline{(*)}$$

kde $R_1$ splňuje odhad

$$|R_1| \leq C\left(|D^2 v| + |Dv|\right) \text{ pro } C \geq 0.$$

Poznámka: $|D^2 v| \cdot |Dv| \leq \varepsilon |D^2 v|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} |Dv|^2$

$C\varepsilon = \underline{\theta^2}$ $\qquad C\big(\underbrace{\tfrac{1}{4\varepsilon}}_{\theta} + 1\big) \leq C\theta$

$\varepsilon = \underline{\theta^2 / C}$ $\qquad C \cdot \left(\frac{C}{4\theta^2} + 1\right)$

(2) Máme $\eta = \sum_{k,l=1}^{n} a^{kl} v_{x_k} v_{x_l}$. Tudíž

$$\eta_{x_i} = \sum_{k,l} 2 a^{kl} v_{x_k x_i} v_{x_l} + (a^{kl})_{x_i} v_{x_k} v_{x_l} \quad \text{(všechny kombinace)}$$

$$\eta_{x_i x_j} = \sum 2 a^{kl} v_{x_k x_i x_j} v_{x_l} + 2 a^{kl} v_{x_k x_i} v_{x_l x_j} + R_2,$$

kde $|R_2| \le C\left(|D^2 v| \cdot |Dv| + |Dv|^2\right)$, neboť

z 1. je člen tvaru $(a^{kl})_{x_j} D^2 v \cdot D^1 v$

2. jsou tři členy: $(a^{kl})_{x_i x_j} D^1 v\, D^1 v$, $(a^{kl})_{x_i}\left[D^2 v\, D^1 v + D^1 v\, D^2 v\right]$

Tudíž

$$-\sum_{i,j} a^{ij} \eta_{x_i x_j} - \sum_{i,j} (a^{ij})_{x_j} \eta_{x_i} = 2 \sum_{k,l} a^{kl} v_{x_l} \left[ -\sum_{i,j} a^{ij} v_{x_k x_i x_j} - \sum (a^{ij})_{x_j} v_{x_k x_i} \right]$$
$$- 2 \sum_{i,j,k,l} a^{ij} a^{kl} v_{x_k x_i} v_{x_l x_j} + R_3,$$

(ii)

kde $|R_3| \le C\left(|D^2 v| \cdot |Dv| + |Dv|^2\right)$

[První suma je z prvních členů $\eta_{x_i}$, $\eta_{x_i x_j}$, druhá suma z druhého v $\eta_{x_i x_j}$]

Díky eliptičnosti A platí, že

$$\sum_{i,j,k,l} a^{ij} a^{kl} v_{x_k x_i} v_{x_l x_j} \ge \theta^2 |D^2 v|^2, \text{ neboť}$$

$$\sum_{i,j} a^{ij} \Big( \sum_{k,l} a^{kl} \underline{v_{x_k x_i}}\, \underline{v_{x_l x_j}} \Big) \ge \theta \sum_{i,j} a^{ij} \text{“}(D^2 v)_i (D^2 v)_j\text{”} \ge \theta^2 |D^2 v|^2.$$

Pomocí tohoto odhadu, vztahu (i) a vztahu (ii) vyplývá, že

$$-\sum_{i,j} a^{ij} \eta_{x_i x_j} - \sum_{i,j} (a^{ij})_{x_j} \eta_{x_i} \le -2\theta^2 |D^2 v|^2 + \sum a^{kl} v_{x_l} \eta_{x_k} + R_4,$$

kde $R_4 = R_3 + 2 \sum_{k,l} a^{kl} v_{x_l} R_1 \Rightarrow |R_4| \le C\left(|D^2 v| \cdot |Dv| + |Dv|^2\right)$

Jelikož $\eta \ge \theta |Dv|^2$ z eliptičnosti, tak dostáváme

$$|R_4| \le C\left[ \varepsilon |D^2 v|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} |Dv|^2 + |Dv|^2 \right] \le \theta^2 |D^2 v|^2 + \underline{\underline{C\eta}}$$

Dosazením do rovnice výše a dostáváme

$$-\sum_{i,j} a^{ij}\eta_{x_i x_j} + \theta^2 |D^2 u|^2 \le C\eta + C(1+\sqrt{\eta})|D\eta|$$

odečtou se na RHS

Z rovnosti

$$-\sum (a^{ij})_{x_j} u_{x_i} - \sum a^{ij} u_{x_i x_j} = \eta \quad \text{v } U$$

vyplývá, že

$$\eta \le C\left(|D^2 u| + |Du|\right) \le C\left(|D^2 u| + \sqrt{\eta}\right) \le C|D^2 u| + C + \frac{\eta}{2},$$

kde jsme použili $C\sqrt{\eta} \le C\nu\eta + \frac{C}{4\nu}$, $\nu = \frac{1}{2C} > 0$.

$$\Rightarrow \quad \eta \le C\left(|D^2 u| + 1\right) \overset{\text{Young}}{\le} \varepsilon |D^2 u|^2 + C(\varepsilon) + C$$

Dohromady

$$C + (\theta^2 - \varepsilon)|D^2 u|^2 - \sum a^{ij}\eta_{x_i x_j} \le C(1+\sqrt{\eta})|D\eta| + C$$

$$\Rightarrow \quad \sigma\eta^2 - \sum_{i,j} a^{ij}\eta_{x_i x_j} \le C + C(1+\sqrt{\eta})|D\eta|, \quad \sigma > 0. \qquad \text{(iii)}$$

(3) $C, \sigma$ závisí na datech úlohy. Vezměme $V \subset \bar{V} \subset U$ a volme

$\zeta : U \to \mathbb{R}$, že $0 \le \zeta \le 1$

$\zeta = 1$ na $V$

$= 0$ blízko $\partial U$

$\zeta$ spojité

Položme $\varphi = \zeta^4 \eta$

$$\varphi_{x_i} = \zeta^4 \eta_{x_i} + 4\zeta^3 \zeta_{x_i}\eta$$

$$\varphi_{x_i x_j} = \zeta^4 \eta_{x_i x_j} + 4\zeta^3\left(\zeta_{x_j}\eta_{x_i} + \zeta_{x_i}\eta_{x_j}\right) + 4\left(\zeta^3 \zeta_{x_i}\right)_{x_j}\eta$$

Volme $x_0 \in \bar{U}$, kde $\varphi$ nabývá maxima ($\zeta, \eta$ spojité)

Jestliže $\zeta(x_0) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

Jinak $\zeta(x_0) > 0$, $x_0 \in U$ (na hranici je $\zeta = 0$), tedy

$$D\varphi(x_0) = 0, \quad D^2\varphi(x_0) \le 0$$

Tudíž $\eta D\mathfrak{p} = -4\mathfrak{p} D\eta$ v bodě $x_0$

V tomto bodě tedy platí:

$$0 \le -\sum_{i,j} a^{ij}\varphi_{x_i x_j} = -\eta^4 \sum_{i,j} a^{ij}\mathfrak{p}_{x_i x_j} + R_5, \quad \text{kde} \qquad \underline{(iv)}$$

$$|R_5| \le C\left(\eta^3|D\mathfrak{p}| + \eta^2\mathfrak{p}\right)$$

Díky (iii) dostáváme

$$\sigma\eta^4\mathfrak{p}^2 \le C\eta^4\sqrt{\mathfrak{p}}\,|D\mathfrak{p}| + C + R_6, \quad \text{kde} \qquad \underline{(v)}$$

$$|R_6| \le C\left(\eta^3|D\mathfrak{p}| + \eta^2\mathfrak{p}\right).$$ (využili jsme odhad (iv) na sum v bodě (iii) )

Jelikož $\eta D\mathfrak{p} = -4\mathfrak{p}D\eta$, tak máme

$$C\eta^4\sqrt{\mathfrak{p}}\,|D\mathfrak{p}| \le C\eta^3\sqrt{\mathfrak{p}}\,(\eta|D\mathfrak{p}|) \le C\eta^3\mathfrak{p}^{3/2} \quad (\eta \text{ omezená fce})$$

$$\le \frac{\sigma}{4}\left(\eta^3\mathfrak{p}^{3/2}\right)^{\frac{4}{3}} + C(\sigma)\cdot 1^{1/4}$$

$$= \frac{\sigma}{4}\mathfrak{p}^2\eta^4 + C$$

a $$|R_6| \le C\left(\eta^3|D\mathfrak{p}| + \eta^2\mathfrak{p}\right) = C\left(\mathfrak{p}\eta^2|D\eta| + \eta^2\mathfrak{p}\right) = C\mathfrak{p}\eta^2 \le$$

$$\le \frac{\sigma}{4}\mathfrak{p}^2\eta^4 + C$$

Tedy (v) implikuje

$$\sigma\eta^4\mathfrak{p}^2 \le \frac{\sigma}{4}\mathfrak{p}^2\eta^4 + C + \frac{\sigma}{4}\mathfrak{p}^2\eta^4$$

$$\underline{\underline{\eta^4\mathfrak{p}^2 \le C}} \quad \text{v bodě } x_0, \qquad C = C(\eta, a^{ij})$$

$$\sigma = \sigma(\eta, a^{ij})$$

Jelikož $\varphi = \eta^4\mathfrak{p}$ má maximum v $x_0$ (vzhledem k $\overline{U}$), tak $\varphi$ je omezeno konstantou $C$.

Poněvadž $\eta = 1$ na $V$, dostáváme $\underline{\underline{\sup_V \mathfrak{p} \le C}}$

$\blacksquare$

## 4A3 Harnackova nerovnost

Aplikujeme odhad z předchozí věty.

**Věta 3** (Harnack)

Pro každou souvislou oblast $V \subset \bar{V} \subset \mathcal{U}$ existuje $C = C(\mathcal{U}, V, a^{ij})$,

že $\sup_V u \le C \inf_V u$ pro každé $u \ge 0$ řešení (1). s $f \equiv 0$

**Dk.**

Vezměme $W$, že $V \subset \bar{V} \subset W \subset \bar{W} \subset \mathcal{U}$ a $r > 0$ malé, aby $B(x,r) \subset W$ pro každé $x \in V$. Buď $\varepsilon > 0$.

Funkce $\tilde{u} = u + \varepsilon$ evidentně řeší rci (1), dle Věty 2 tedy

$\exists C > 0$, že $\sup_W \frac{|Du|}{u+\varepsilon} \le C$. z elipticity $A$ je $\eta \ge \theta \frac{|Du|^2}{(u+\varepsilon)^2}$

Vezmeme libovolné $y, z \in B(x,r) \subset W$, potom

$$\left|\log(u(y)+\varepsilon) - \log(u(z)+\varepsilon)\right| \overset{\text{lagrange}}{\le}$$

$$\le \left(\sup_{B(x,r)} \Big|\underbrace{D(\log(u+\varepsilon))}_{\frac{|Du|}{u+\varepsilon}}\Big|\right) \cdot |y-z| \le \underline{\underline{2r \cdot C}}$$

Tedy $\log(u(y)+\varepsilon) \le 2rC + \log(u(z)+\varepsilon)$

$$\Rightarrow u(y) + \varepsilon \le e^{2rC} \cdot e^{\log(u(z)+\varepsilon)} = e^{2rC}(u(z)+\varepsilon)$$

$$\overset{\varepsilon \to 0+}{\Rightarrow} \max_{\overline{B(x,r)}} u \le e^{2rC} \min_{\overline{B(x,r)}} u$$

$V$ je souvislá množina v $\mathbb{R}^n$ ($\bar{V}$ je kompaktní $\to$ tot. omez.), tedy najdeme koule $\{B(x_i,r)\}_{i=1}^N$ pokrývající $V$, které se překrývají ($\Leftarrow$ souvislost)

Nakonec $\sup_V u \le \left(e^{2rC}\right)^N \inf_V u$ ∎


$\max_{B_1} u \le C \min_{B_1} u \le C \max_{B_2} u \le C^2 \min_{B_2} u \dots$

**Důsledek** (Silný princip maxima)

Buď $u \in C^2(\bar{U})$ řeší rovnici (1) s $f \equiv 0$, $U \subset \mathbb{R}^n$ omezená, souvislá, ot.

Potom platí buď $\min_{\partial U} u < u(x) < \max_{\partial U} u$, pro $x \in U$,

nebo je $u$ na $U$ konstantní funkce.

**Dk.** Označme $M = \max_{\partial U} u$ a $\hat{u} = M - u$.

Potom $-\sum_{i,j} (a^{ij} \hat{u}_{x_i})_{x_j} = 0$ v $U$ a $\hat{u} \geq 0$ na $\partial U$

Tudíž ($\hat{u}^- \equiv 0$ na $\partial U$)

$$0 = -\sum_{i,j} \int_U (a^{ij} \hat{u}_{x_i})_{x_j} (\hat{u})^- =$$

$$= \sum_{i,j} \int_U a^{ij} \hat{u}_{x_i} (\hat{u})^-_{x_j} \geq \theta \int_{U \cap \{\hat{u} < 0\}} |D\hat{u}|^2 ,$$

neboť $D(\hat{u})^- = -D\hat{u}$ s.v. na $\{\hat{u} < 0\}$

Tedy $D(\hat{u})^- = 0$ s.v. v $U$ (pro $\hat{u} \geq 0$ automaticky, $\hat{u} < 0$ z odhadu), tj. konstanta

Jelikož $(\hat{u})^- \equiv 0$ na $\partial U$, tak $(\hat{u})^- \equiv 0$ v $\Omega$

Tudíž $\underline{\hat{u} \geq 0 \text{ na } U}$

Ať $V \subset \bar{V} \subset U$ libovolná souvislá. Harnackova nerovnost, neboť $\hat{u} \geq 0$ řešení (1).

nám dává odhad $\sup_V \hat{u} \leq C \inf_V \hat{u}$

Buď tedy $\hat{u} \equiv 0$ na $V$, nebo $\hat{u} > 0$ všude na $V$

Buď tedy $\hat{u} \equiv 0$ na $V$, nebo $\hat{u} > 0$ všude na $V$ ($V$ libovolné, $u \in C^2(\bar{U})$).

Zjevně tedy platí tvrzení ve větě ∎