Seminář nmma431
Boltzmannova věta H

Petr Kaplický

19. března 2020

Podle Ansgar Jüngel: Entropy dissipation methods for nonlinear PDEs.

setting:

X Banachův prostor, $A : D(A) \subset X \to X$, $u : \mathbb{R} \to D(A)$

setting:
X Banachův prostor, $A : D(A) \subset X \to X$, $u : \mathbb{R} \to D(A)$

$$u_t + Au = 0, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0 \in D(A),$$

setting:
X Banachův prostor, $A : D(A) \subset X \to X$, $u : \mathbb{R} \to D(A)$

$$u_t + Au = 0, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0 \in D(A),$$

pro každé t je $u(t)$ hladká fce v $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $u_0 \geq 0$.

setting:
X Banachův prostor, $A : D(A) \subset X \to X$, $u : \mathbb{R} \to D(A)$

$$u_t + Au = 0, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0 \in D(A),$$

pro každé t je $u(t)$ hladká fce v $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $u_0 \geq 0$.

opakování entropie H:

setting:
X Banachův prostor, $A : D(A) \subset X \to X$, $u : \mathbb{R} \to D(A)$

$$u_t + Au = 0, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0 \in D(A),$$

pro každé t je $u(t)$ hladká fce v $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $u_0 \geq 0$.

opakování entropie H:

- Ljapunovský funkcionál, tj. $\frac{d}{dt} H(u) \leq 0$ pro $t > 0$

setting:
X Banachův prostor, $A : D(A) \subset X \to X$, $u : \mathbb{R} \to D(A)$

$$u_t + Au = 0, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0 \in D(A),$$

pro každé t je $u(t)$ hladká fce v $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $u_0 \geq 0$.

opakování entropie H:

- Ljapunovský funkcionál, tj. $\frac{d}{dt}H(u) \leq 0$ pro $t > 0$
- konvexní

setting:
X Banachův prostor, $A : D(A) \subset X \to X$, $u : \mathbb{R} \to D(A)$

$$u_t + Au = 0, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0 \in D(A),$$

pro každé t je $u(t)$ hladká fce v $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $u_0 \geq 0$.

opakování entropie H:

- Ljapunovský funkcionál, tj. $\frac{d}{dt} H(u) \leq 0$ pro $t > 0$
- konvexní
- $d(u, u^*) \leq \mathfrak{F}(H(u) - H(u^*))$

Boltzmannova rovnice

Boltzmannova rovnice

zachování hybnosti a energie:

$$v + w = v^* + w^*, \quad |v|^2 + |w|^2 = |v^*|^2 + |w^*|^2$$

Boltzmannova rovnice
zachování hybnosti a energie:

$$v + w = v^* + w^*, \quad |v|^2 + |w|^2 = |v^*|^2 + |w^*|^2$$

rovnice pro $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} B(v-w,n)(f(v^*,t)f(w^*,t)-f(v,t)f(w,t))\, \mathrm{d}w\, \mathrm{d}n,$$

Boltzmannova rovnice
zachování hybnosti a energie:

$$v + w = v^* + w^*, \quad |v|^2 + |w|^2 = |v^*|^2 + |w^*|^2$$

rovnice pro $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} B(v-w, n)(f(v^*,t)f(w^*,t) - f(v,t)f(w,t))\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}n,$$

kde

$$v^* = \frac{1}{2}(v + w + |v-w|n), \quad w^* = \frac{1}{2}(v + w - |v-w|n)$$
$$B(v-w, n) = B(v-w, \frac{v-w}{|v-w|} \cdot n) \geq 0$$

Boltzmannova rovnice
zachování hybnosti a energie:

$$v + w = v^* + w^*, \quad |v|^2 + |w|^2 = |v^*|^2 + |w^*|^2$$

rovnice pro $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} B(v-w,n)(f(v^*,t)f(w^*,t)-f(v,t)f(w,t))\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}n,$$

kde

$$v^* = \frac{1}{2}(v + w + |v-w|n), \quad w^* = \frac{1}{2}(v + w - |v-w|n)$$
$$B(v-w,n) = B(v-w, \frac{v-w}{|v-w|} \cdot n) \geq 0$$

slabá formulace:

$$\forall \Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) : \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} f(v)\Phi(v)\,\mathrm{d}v$$
$$= -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} B(v-w,n)[f(v^*)f(w^*) - f(v)f(w)] \times$$
$$[\Phi(v^*) + \Phi(w^*) - \Phi(v) - \Phi(w)]\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

Boltzmannova rovnice
zachování hybnosti a energie:

$$v + w = v^* + w^*, \quad |v|^2 + |w|^2 = |v^*|^2 + |w^*|^2$$

rovnice pro $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} B(v-w, n)(f(v^*, t)f(w^*, t) - f(v,t)f(w,t))\, \mathrm{d}w\, \mathrm{d}n,$$

kde

$$v^* = \frac{1}{2}(v + w + |v-w|n), \quad w^* = \frac{1}{2}(v + w - |v-w|n)$$

$$B(v-w, n) = B(v-w, \frac{v-w}{|v-w|} \cdot n) \geq 0$$

slabá formulace:

$$\forall \Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) : \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} f(v)\Phi(v)\, \mathrm{d}v$$
$$= -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} B(v-w, n)[f(v^*)f(w^*) - f(v)f(w)] \times$$
$$[\Phi(v^*) + \Phi(w^*) - \Phi(v) - \Phi(w)]\, \mathrm{d}n\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}w$$

zákony zachování pro Boltzmannovu rovnici:

$$\Phi(v) = 1 \vee v \vee |v|^2 \implies \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} f(v,t)\Phi(v)\, \mathrm{d}v = 0$$

příprava pro větu H:

$$H_1(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \lg(f),$$

$$\mathcal{U} = \{f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty); \qquad \int_{\mathbb{R}^d} f = 1, \int_{\mathbb{R}^d} f(v) v \, \mathrm{d}v = 0,$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(v) \frac{|v|^2}{2} \, \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\}$$

příprava pro větu H:

$$H_1(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \lg(f),$$

$$\mathcal{U} = \{f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty); \qquad \int_{\mathbb{R}^d} f = 1, \int_{\mathbb{R}^d} f(v)v \, \mathrm{d}v = 0,$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(v)\frac{|v|^2}{2} \, \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\}$$

Věta (Boltzmannova věta H)

Funkce $f_\infty(v) := (2\pi)^{-d/2} \exp(-|v|^2/2)$ *je stacionární řešení Boltzmannovy rovnice. Funkcionál* H_1 *je entropie homogenní Boltzmannovy rovnice na množině* $\mathcal{U}$.

příprava pro větu H:

$$H_1(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \lg(f),$$

$$\mathcal{U} = \{f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty); \qquad \int_{\mathbb{R}^d} f = 1, \int_{\mathbb{R}^d} f(v)v \, \mathrm{d}v = 0,$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(v)\frac{|v|^2}{2} \, \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\}$$

Věta (Boltzmannova věta H)

Funkce $f_\infty(v) := (2\pi)^{-d/2} \exp(-|v|^2/2)$ *je stacionární řešení Boltzmannovy rovnice. Funkcionál* H_1 *je entropie homogenní Boltzmannovy rovnice na množině* $\mathcal{U}$*.*

- f_∞ je min H_1 na $\mathcal{U}$

příprava pro větu H:

$$H_1(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \lg(f),$$

$$\mathcal{U} = \{f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty); \qquad \int_{\mathbb{R}^d} f = 1, \int_{\mathbb{R}^d} f(v) v \, \mathrm{d}v = 0, \int_{\mathbb{R}^d} f(v) \frac{|v|^2}{2} \, \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\}$$

Věta (Boltzmannova věta H)

Funkce $f_\infty(v) := (2\pi)^{-d/2} \exp(-|v|^2/2)$ *je stacionární řešení Boltzmannovy rovnice. Funkcionál* H_1 *je entropie homogenní Boltzmannovy rovnice na množině* $\mathcal{U}$*.*

- f_∞ je min H_1 na $\mathcal{U}$
- H_1 je Ljapunovský funkcionál

příprava pro větu H:

$$H_1(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \lg(f),$$

$$\mathcal{U} = \{f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty); \qquad \int_{\mathbb{R}^d} f = 1, \int_{\mathbb{R}^d} f(v) v \, \mathrm{d}v = 0, \int_{\mathbb{R}^d} f(v) \frac{|v|^2}{2} \, \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\}$$

Věta (Boltzmannova věta H)

Funkce $f_\infty(v) := (2\pi)^{-d/2} \exp(-|v|^2/2)$ *je stacionární řešení Boltzmannovy rovnice. Funkcionál* H_1 *je entropie homogenní Boltzmannovy rovnice na množině* $\mathcal{U}$.

- f_∞ je min H_1 na $\mathcal{U}$
- H_1 je Ljapunovský funkcionál
- f_∞ je stacionární řešení

příprava pro větu H:

$$H_1(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \lg(f),$$

$$\mathcal{U} = \{f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty); \qquad \int_{\mathbb{R}^d} f = 1, \int_{\mathbb{R}^d} f(v) v \, \mathrm{d}v = 0,$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(v) \frac{|v|^2}{2} \, \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\}$$

Věta (Boltzmannova věta H)

Funkce $f_\infty(v) := (2\pi)^{-d/2} \exp(-|v|^2/2)$ *je stacionární řešení Boltzmannovy rovnice. Funkcionál* H_1 *je entropie homogenní Boltzmannovy rovnice na množině* $\mathcal{U}$*.*

- f_∞ je min H_1 na $\mathcal{U}$
- H_1 je Ljapunovský funkcionál
- f_∞ je stacionární řešení
- jeho jednoznačnost?

příprava pro větu H:

$$H_1(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \lg(f),$$

$$\mathcal{U} = \{f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty); \qquad \int_{\mathbb{R}^d} f = 1, \int_{\mathbb{R}^d} f(v) v \, \mathrm{d}v = 0,$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(v) \frac{|v|^2}{2} \, \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\}$$

Věta (Boltzmannova věta H)

Funkce $f_\infty(v) := (2\pi)^{-d/2} \exp(-|v|^2/2)$ *je stacionární řešení Boltzmannovy rovnice. Funkcionál* H_1 *je entropie homogenní Boltzmannovy rovnice na množině* $\mathcal{U}$*.*

- f_∞ je min H_1 na $\mathcal{U}$
- H_1 je Ljapunovský funkcionál
- f_∞ je stacionární řešení
- jeho jednoznačnost?
- použití Csiczar-Kullback nerovnosti na H_1

Věta (Csiczar-Kullback nerovnost)

- $\int_\Omega f = \int_\Omega g = 1$, $f \geq 0$, $g > 0$
- $\Phi(s) \geq \Phi(1) + \Phi'(1)(s-1) + \gamma^2(s-1)^2\chi_{\{s<1\}}$
- $H_\Phi(f) = \int_\Omega \Phi(\frac{f}{g})g$

Pak

$$\|f-g\|_1^2 \leq \frac{4}{\gamma^2}(H_\Phi(f) - H_\Phi(g))$$

Věta (Csiczar-Kullback nerovnost)

- $\int_\Omega f = \int_\Omega g = 1,\ f \geq 0,\ g > 0$
- $\Phi(s) \geq \Phi(1) + \Phi'(1)(s-1) + \gamma^2(s-1)^2\chi_{\{s<1\}}$
- $H_\Phi(f) = \int_\Omega \Phi(\frac{f}{g})g$

Pak

$$\|f - g\|_1^2 \leq \frac{4}{\gamma^2}(H_\Phi(f) - H_\Phi(g))$$

aplikace:

- $g := f_\infty$

Věta (Csiczar-Kullback nerovnost)

- $\int_\Omega f = \int_\Omega g = 1,\ f \geq 0,\ g > 0$
- $\Phi(s) \geq \Phi(1) + \Phi'(1)(s-1) + \gamma^2(s-1)^2\chi_{\{s<1\}}$
- $H_\Phi(f) = \int_\Omega \Phi(\frac{f}{g})g$

Pak

$$\|f-g\|_1^2 \leq \frac{4}{\gamma^2}(H_\Phi(f) - H_\Phi(g))$$

aplikace:

- $g := f_\infty$
- $\Phi(s) = s\lg(s)$

Věta (Csiczar-Kullback nerovnost)

- $\int_\Omega f = \int_\Omega g = 1,\ f \geq 0,\ g > 0$
- $\Phi(s) \geq \Phi(1) + \Phi'(1)(s-1) + \gamma^2(s-1)^2\chi_{\{s<1\}}$
- $H_\Phi(f) = \int_\Omega \Phi(\frac{f}{g})g$

Pak

$$\|f-g\|_1^2 \leq \frac{4}{\gamma^2}(H_\Phi(f) - H_\Phi(g))$$

aplikace:

- $g := f_\infty$
- $\Phi(s) = s\lg(s)$
- $H_\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\frac{f}{f_\infty})f_\infty$

Věta (Csiczar-Kullback nerovnost)

- $\int_\Omega f = \int_\Omega g = 1,\ f \geq 0,\ g > 0$
- $\Phi(s) \geq \Phi(1) + \Phi'(1)(s-1) + \gamma^2 (s-1)^2 \chi_{\{s<1\}}$
- $H_\Phi(f) = \int_\Omega \Phi(\frac{f}{g}) g$

Pak

$$\|f - g\|_1^2 \leq \frac{4}{\gamma^2}(H_\Phi(f) - H_\Phi(g))$$

aplikace:

- $g := f_\infty$
- $\Phi(s) = s \lg(s)$
- $H_\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\frac{f}{f_\infty}) f_\infty$

Dostáváme:

$$\|f - f_\infty\|_1^2 \leq \frac{4}{\gamma^2}(H_\Phi(f) - H_\Phi(f_\infty)) = \frac{4}{\gamma^2} H_\Phi(f) = \frac{4}{\gamma^2}(H_1(f) - H_1(f_\infty))$$