3. Fokker-Planckova rovnice

Jedná se obecně o rovnice tvaru

$$\partial_t u = \mathrm{div}\,(\nabla f(u) + u \nabla V),$$

kde f je typicky nějaká nelinearita, V je potenciál

Popisuje časový vývoj ~~pravděpodobnosti~~ hustoty pravděpodobnosti
rychlosti částice na kterou působí odpor prostředí
a „náhodné" síly (např. Brownův pohyb)
... viz wiki

My začneme (jako dosud) s rovnicí vedení tepla, tj.
uvažujeme $f = id$, $V = 0$.

Uvidíme, jak se chová řešení pro velké časy
a uvidíme využití logaritmické Sobolevovy nerovnosti,
která bude ukázána později

Červeně zapíšeme části, které ~~jsou~~ opravují pasáže
z článku.

3.1. Relaxation to self-similarity (český termín...?)

Mějme rci vedení tepla v celém prostoru, tj.

$$(3.13) \quad \begin{aligned} &\partial_t u = \Delta u \quad \text{v } \mathbb{R}^d,\ t>0 \\ &u(0,\cdot) = u_0(\cdot) \geq 0 \quad \text{v } \mathbb{R}^d \end{aligned} \qquad \text{a} \quad \int_{\mathbb{R}^d} u_0\, dx = 1$$

(pře normování)

Jejím řešením je funkce

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dy$$

⌈ Odvozuje se na Úvodu do PDE, viz Rokyta 2012/13 případně Fourierova transformace + distribuce ⌋

Vidíme, že $u(t,x) > 0$, neboť integrand výše je nezáporný a kladný na netriv. množině $\left(c = \int_{\mathbb{R}^d} u_0 \neq 0\right)$

Navíc $\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\, dx = 1$

⌈

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\, dx = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dy \right) dx =$$

$$\overset{\substack{x \mapsto z \\ x-y := z \\ dx = dz}}{=} (4\pi t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)\, e^{-\frac{|z|^2}{4t}}\, dy \right) dz =$$

$$= (4\pi t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{-\frac{|z|^2}{4t}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)\, dy}_{=1} \right) dz =$$

$$= (4\pi t)^{-d/2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|z|^2}{4t}}\, dz}_{\text{umíme}} = 1$$

⌋

Dále $u(t,\cdot) \longrightarrow 0$ v $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $t \to \infty$, neboť

$$u(t,x) = (4\pi t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{u_0(y)}_{\geq 0} \underbrace{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}_{\substack{\text{klesající fce} \\ \text{omezená } 1 \text{ a } 0}} dy \leq (4\pi t)^{-d/2} \underbrace{\int u_0}_{=1} \to 0$$

Navíc je to i intuitivně jasné... teplo se časem rovnoměrně rozloží do celého prostoru.

Dosud jsme pracovali s $H_1 u = \int_{\mathbb{R}^d} (\log u - 1) u \, dx$

Je to Lyapunův funkcionál, neboť pro $\forall t > 0$ je

$$\frac{dH_1}{dt}(u(t)) = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} (\log u - 1) u =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u \cdot \log u - \partial_t u + u \cdot \frac{\partial_t u}{u} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u \log u \overset{(3.13)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \Delta u \log u = - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \frac{\nabla u}{u}$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla u|^2}{u} \leq 0, \text{ neboť } u > 0 \text{ (str. 2)}$$

(co jsme dělali už dávno...)

<u>Nicméně</u>

$$H_1(u(t)) = \int_{\mathbb{R}^d} (-u + u \log u) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} u \log \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} dx$$

$$\leq \log \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x) dx = \log \|u\|_\infty \xrightarrow{t \to \infty} -\infty$$

dle konvergence výše.

To nám asi nedává moc informací navíc

$\longrightarrow$ jiná entropie?

" Relaxation of the solution to the self-similar solution"

Pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $t > 0$ definujeme

$$\boxed{\mathcal{U}(t,x) = \frac{1}{(2\pi(2t+1))^{d/2}} \exp\left(\frac{-|x|^2}{2(2t+1)}\right)}$$

... tzv. fundamentální řešení (zmenšující se hrb)

Budeme zkoumat, jak rychle jde $u(t) - \mathcal{U}(t)$ k 0,

tj. dosud víme jen to, že $u(t) \longrightarrow 0$,

ale k 0 půjde i s exponenciálou

Že jde opravdu o řešení ... viz dodatek na konci.

Zkoumáme stacionární řešení, takže změníme souřadnice

takovým způsobem, aby $\mathcal{U}$ nezáviselo na čase

Nabízí se $\underline{\frac{x}{\sqrt{2t+1}} =: y}$, pak $\exp\left(-\frac{|x|^2}{2(2t+1)}\right) = e^{-|y|^2/2}$.

a pak se chceme zbavit členu před exp.

$$(2t+1)^{d/2} = e^{sd}, \text{ tj. } \underline{s = \log (2t+1)^{1/2}}$$

a definujme ~~nové řešení u~~ transformaci v souř. s, y

$$\underline{\underline{v(s,y)}} := e^{ds} \cdot u\left(\tfrac{1}{2}(e^{2s}-1),\, e^{s}y\right), \quad y \in \mathbb{R}^d, s > 0$$

(není diferenciál) čas prostor

$$\tfrac{1}{2}(e^{2s}-1) = \tfrac{1}{2}(2t+1-1) = t$$

$$e^s y = (2t+1)^{1/2} \frac{x}{\sqrt{2t+1}} = x$$

Podívejme se, zda v nevyřeší něco jako rci vedení tepla

$$\frac{\partial v}{\partial s} = d e^{ds} u + e^{ds}\Big[\partial_t u \cdot e^{2s} \cdot \cancel{\tfrac{2}{2}} + \nabla_x u \, \underbrace{e^{s} y}_{\text{vektory}}\Big]$$

$$= dv + e^{2s} e^{ds} \Delta_x u + e^{s} e^{ds} \nabla_x u \cdot y$$

$$= dv + \Delta_y v + \nabla_y v \cdot y = \operatorname{div}_y (yv + \nabla_y v)$$

Navíc $v(0,y) = u(0,y) = u_0$. Tedy v řeší rovnici:

$$\text{(3.15)} \qquad \begin{aligned} \partial_s v &= \operatorname{div}(\nabla v + yv) \quad \text{v } \mathbb{R}^d,\ s>0 \\ v(0) &= u_0 \quad \text{v } \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

To je Fokker-Planckova rovnice pro $V(y) = \frac{1}{2}|y|^2$
$(t = \mathrm{id})$

Jak se tedy transformovalo to speciální řešení U?

To je jasné
$$V(s,y) = \underbrace{(2t+1)^{d/2}}_{= e^{ds}} U(t,x) = (2\pi)^{-d/2} e^{-\frac{|y|^2}{2}}$$

Toto V nezávisí na s ... definujme tedy stac. řešení

$$M(y) = (2\pi)^{-d/2} e^{-\frac{|y|^2}{2}},$$ tzv. Maxwellian

[Asi viz Maxwell-Boltzmann distribution]

Budeme brát fce v z množiny

$$X = \Big\{ \underbrace{v \in L^1(\mathbb{R}^d);\ v \geq 0,\ \int_{\mathbb{R}^d} v \, dy = 1}_{\text{přirozené}};\ \underbrace{|y|^2 v,\ v \log v \in L^1(\mathbb{R}^d)}_{\text{kvůli entropii}} \Big\}$$

Definujme

$$H_1 v = \int_{\mathbb{R}^d} v \log \frac{v}{M} \, dy = \int_{\mathbb{R}^d} v \log v - v \log M$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} v \log v + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left(d \log(2\pi) + |y|^2 \right) v$$

Věta 3.1 (Exponenciální pokles pro Fokker-Planckovu rovnici)

Buď $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $u_0 \geq 0$ a $\int_{\mathbb{R}^d} u_0 \, dx = 1$. Ať v řeší (3.15), potom

$$0 \leq H_1 v(s) \leq e^{-2s} H_1 u_0 \quad \text{pro } \forall s > 0 \qquad (3.16)$$

Navíc $v(s)$ konverguje exponenciálně k Maxwelliánu, tj.

$$\| v(s) - M \|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq e^{-s} \sqrt{8 H_1 u_0} \quad \text{pro } \forall s > 0 \qquad (3.17)$$

Dk.

(3.16) $\Rightarrow$ (3.17): Máme Csiszár-Kullbackovu větu, tj.

$f, g \in L^1$, $f \geq 0$, $g > 0$, $\int f = \int g = 1$, $\phi \in C^1(\mathbb{R})$, $\exists p > 0$

$$\phi(s) \geq \phi(1) + (s-1)\phi'(1) + p^2 (s-1)^2 \chi_{\{s<1\}}, \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

$$H_\phi f = \int \phi(f/g) \cdot g \quad \Rightarrow \quad \| f - g \|_{L^1}^2 \leq \frac{4}{p^2} \left(H(f) - H(g) \right)$$

Mějme $f = v$, $g = M > 0$, $\phi = s \log s$, $p = 1/\sqrt{2}$

Dostáváme

$$\| v(s) - M \|_1^2 \leq 8 \left(e^{-2s} H_1 u_0 - \overset{\log 1}{0} \right) = 8 e^{-2s} H_1 u_0$$

což je (3.17).

Takže nyní počítáme (chceme Grönwalla)

$$\frac{dH_1}{ds}(v(s)) = \frac{d}{ds}\left[\int_{\mathbb{R}^d} v \log v + \frac{1}{2}\log(2\pi)\overbrace{\int_{\mathbb{R}^d} v}^{=1} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |y|^2 v\right]$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_s v \log v + v\frac{\partial_s v}{v} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |y|^2 \partial_s v$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_s v \log v + \underbrace{\frac{d}{ds}\int_{\mathbb{R}^d} v}_{=0} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |y|^2 \partial_s v$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_s v \log v + \frac{1}{2}|y|^2 \partial_s v$$

$$\overset{(3.15)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}(\nabla v + yv)\log v + \frac{1}{2}|y|^2 \operatorname{div}(\nabla v + yv)$$

Gauss-Green-Ostrogradski

$$\overset{GGO}{=} -\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla v + yv)\frac{\nabla v}{v} - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \nabla(|y|^2)(\nabla v + yv)$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla v|^2}{v} + y\nabla v - \int_{\mathbb{R}^d} |y|\frac{y}{|y|}(\nabla v + yv)$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{|\nabla v|^2}{v} + 2y\nabla v + |y|^2 v\right) dy$$

1. možnost:

$$\frac{dH_1}{ds}(v(s)) = -\int_{\mathbb{R}^d} v\left|\nabla(\log v) + y\right|^2 \leq 0 \quad H_1 \text{ je Lyapunov}$$

2. možnost: (per partes)

$$\frac{dH_1}{ds}(v(s)) = -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla v|^2}{v} + |y|^2 v + \overbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{2\operatorname{div} y}_{=2d} \cdot y}^{2d}$$

$$= 2d - \int_{\mathbb{R}^d}\left(4|\nabla\sqrt{v}|^2 + |y|^2 v\right)$$

Předpokládejme, že platí odhad

$$2\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\sqrt{v}|^2 dy \geq \int_{\mathbb{R}^d} v \log v \, dy + d\left(1 + \frac{1}{2}\log(2\pi)\right) \qquad \underline{(3.18)}$$

Pak dostáváme vztah

$$\frac{dH_1}{ds}(v(s)) \leq -2\int_{\mathbb{R}^d} v\log v \, dy - \int_{\mathbb{R}^d} |y|^2 v + \underline{2d} - 2d\left(\underline{1} + \frac{1}{2}\log(2\pi)\right)$$

$$\leq -2\left[\int_{\mathbb{R}^d} v\log v + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |y|^2 v + \frac{1}{2}\log(2\pi)\overbrace{\int_{\mathbb{R}^d} v}^{=1}\right]$$

$$\leq -2 H_1 v(s).$$

Grönwall $\left[\ u'(t) \leq \beta(t)u(t);\ \beta, u : I \to \mathbb{R} \text{ spoj., } u \in C^1\right.$

$$\Rightarrow u(t) \leq u(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t \beta(s)\,ds\right)$$

Tudíž

$$H_1 v(s) \leq H_1 v(0) \exp\int_0^s -2$$

Tedy $H_1 v(s) \leq H_1 u_0\, e^{-2s}$, což je $\underline{(3.17)}$

Teď se vrátíme do původních souřadnic.

Je $u(t,x) = (2t+1)^{-d/2} M(y) = (2t+1)^{-d/2} M\left(\frac{x}{(2t+1)^{-1/2}}\right)$

~~3.17~~ (3.17) přejde pomocí $y = x/\sqrt{2t+1}$ do tvaru

$$\|v(s) - M\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |v(y,s) - M(y)|\,dy =$$

$(2t+1)^{d/2} dy = dx$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |(2t+1)^{d/2} u(\ ) - (2t+1)^{d/2} M(\ )| =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x) - U(t,x)| = \|u(t) - U(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

a $e^{-s}\sqrt{8H_1u_0} = (2t+1)^{-1/2}\sqrt{8H_1u_0}$

Dostáváme tak

Důsledek 3.2 (Relaxation to self-similarity)

Buď $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $u_0 \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} u_0 = 1$. Ať

$$U(t,x) = (2\pi(2t+1))^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2(2t+1)}\right).$$

Nechť u řeší (3.13), potom

$$\|u(t) - U(t)\|_1 \leq \sqrt{\frac{8H_1 u_0}{2t+1}}, \quad \forall t > 0.$$

Dk. Plyne z předchozí diskuse.

Dodatek: U řeší 3.13.

$$\partial_t U = (2\pi(2t+1))^{-\frac{d}{2}-1} \cdot \left(-\frac{d}{2}\right) \cdot 4\pi \exp() + (2\pi(2t+1))^{-d/2} \exp()\left[-\frac{-|x|^2 \cdot 4}{(2(2t+1))^2}\right]$$

$$\nabla U = (2\pi(2t+1))^{-d/2} \exp() \cdot \left[-2|x| \frac{x}{|x|} \frac{1}{2(2t+1)}\right] =$$

$$= -2\pi x \, (2\pi(2t+1))^{-\frac{d}{2}-1} \exp()$$

$\cancel{\frac{\partial}{\partial x_k}(\nabla U) =}$

$$\operatorname{div}(\nabla U) = -(2\pi(2t+1))^{-\frac{d}{2}-1} \cdot 2\pi \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_k}\left[x_k \exp()\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}[\,] = \exp() + x_k \exp() \cdot (-2x_k)\,(2(2t+1))^{-1}$$

$$= \exp()\left[1 - \frac{2x_k^2}{2(2t+1)}\right]$$

$$\Delta U = -\left(d - \frac{|x|^2}{2t+1}\right) \exp() \cdot (2\pi(2t+1))^{-\frac{d}{2}-1} \cdot 2\pi \quad \cancel{\Delta U = \partial_t U}\ ?$$

$$\partial_t U = \left[-2\pi d\, (2\pi(2t+1))^{-\frac{d}{2}-1} + (2\pi(2t+1))^{-\frac{d}{2}} \frac{|x|^2 \, (2\pi)^2}{(2t+1)^2 \cdot (2\pi)^2}\right] \exp()$$

$$\|$$

$$\Delta U = \left[-2\pi\, (2\pi(2t+1))^{-\frac{d}{2}-1} \cdot d + 2\pi |x|^2 \frac{1}{(2\pi(2t+1))^{\frac{d}{2}+1}} \frac{2\pi}{(2t+1)\cdot 2\pi}\right] \exp()$$

$$= \left[- \;''\; - \quad + 4\pi^2 |x|^2 \frac{1}{(2\pi(2t+1))^{d/2+2}}\right] \exp().$$

Tedy $\partial_t U = \Delta U$.