1. Zápočtová písemka

1) $$\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{\sqrt{3^{2n}+5n2^n}-\sqrt{3^{2n}+4}}{n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{3^{2n}+5n2^n-3^{2n}-4}{n\left(\sqrt{3^{2n}+5n2^n}+\sqrt{3^{2n}+4}\right)}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2^n\left(5n - 4/2^n\right)}{n\,3^n\left(\sqrt{1+5n\left(\frac{2}{3}\right)^n}+\sqrt{1+\frac{4}{3^{2n}}}\right)} = \frac{5-\frac{4}{n2^n}}{\sqrt{1+5n(2/3)^n}+\sqrt{1+\frac{4}{3^{2n}}}} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{5}{2}$$

2) Vyšetříme fci $f(x) := x - \left(7 - \frac{10}{x}\right) = \frac{x^2-7x+10}{x} = \frac{(x-5)(x-2)}{x}$

f je kladná pro $x \in (0,2) \cup (5,+\infty)$

nulová $x \in \{2,5\}$

záporná $x \in (-\infty,0) \cup (2,5)$

Pokud bude $a_n \in (2,5)$ pro $n \in \mathbb{N}$ bude posl. a_n rostoucí!

(Všimneme si, že $f(a_n) = a_n - a_{n+1}$.) Víme $a_1 = 4 \in (2,5)$.

Pro existenci limity stačí ukázat, že $a_n < 5$, $\forall n$.

Indukcí: ať $a_n < 5$ pak $a_{n+1} = 7 - \frac{10}{a_n} < 7 - \frac{10}{5} = 5$ $\perp$

$\Rightarrow$ ex. limita (a_n), označme ji a.

Provedeme limitní přechod v $a_{n+1} = 7 - \frac{10}{a_n}$ a dostaneme

$a = 7 - \frac{10}{a}$ tj. $a^2 - 7a + 10 = 0$, protože a musí ležet v $[a_1, 5]$ dostáváme $a = 5$.

3) $$\frac{2^n + 2^{n-1}(-1)^n}{3^n+n^6} = \frac{2^n\left(1+\frac{(-1)^n}{2}\right)}{3^n\left(1+\frac{n^6}{3^n}\right)} \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{2}$$

Protože $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ konverguje, konverguje dle srovnávacího krit. i řada $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+2^{n-1}(-1)^n}{3^n+n^6}$.