3. zkoušková písemka, úterý 5.6.

I) [10b] Nalezněte kandidáta na řešení vlnové rovnice $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ na $(0,+\infty) \times (0,\pi)$ s okrajovou podmínkou $\partial_x u(t,0) = 0$, $u(t,\pi) = 0$ pro $t \in (0,+\infty)$ a počáteční podmínkou $u(0,x) = u_0(x)$ a $\partial_t u(0,x) = u_1(x)$ pro $x \in (0,\pi)$.

Najděte kandidáta na řešení pro $u_0(x) = \cos(x/2)$ a $u_1(x) = 0$. Ověřte, že opravdu jde o klasické řešení.

Řešení s obecnou počáteční podmínkou vyjde jako funkce definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Jakou má symetrii vzhledem k $t = 0$ a $t = \pi$.

II) [10b] Najděte všechny charakteristiky rovnice $\sqrt{|x|}\partial_x u + \partial_y u = 0$. Nakreslete obrázek.

Určete obecný tvar řešení na okolí bodu $(1,0)$.

Najděte řešení na jistém okolí U bodu $(1,0)$, které splňuje $u(x,0) = \exp(x)$ pro $(x,0) \in U$.

Je možné nalézt toto řešení na nějakém okolí bodu $(0,0)$?

Najděte Cauchyova data na $\{(x,0) \subset \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$, pro která existuje klasické řešení na celém $\mathbb{R}^2$.

III) [10b] Uvažte numerické schéma

$$\frac{1}{2k}\left[(v_m^{n+1} + v_{m+1}^{n+1}) - (v_m^n + v_{m+1}^n)\right] + \frac{a}{2h}\left[(v_{m+1}^{n+1} - v_m^{n+1}) + (v_{m+1}^n - v_m^n)\right] = f_m^n$$

pro rovnici $\partial_t u + a\partial_x u = f$.

- Rozhodněte, zda je schéma explicitní nebo implicitní, tříkrokové nebo jednokrokové.
- Pro která $k, h > 0$ je schéma stabilní?
- Kdy je schéma konzistentní?
- Na jakých oblastech stability je schéma stabilní a konzistentní zároveň?

1) Použijme Fourierovy metody oddělení proměnných

$$u(t,x) = T(t)\,X(x)$$

$$\Rightarrow \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = \alpha$$

Řešíme úlohu $\begin{cases} X'' - \alpha X = 0 & \text{v } (0,\pi) \text{ s okrajovými podmínkami} \\ X'(0) = 0,\ X(\pi) = 0 \end{cases}$

1) Násobíme X a integrujeme per partes: $\int_0^\pi X''X - \alpha X^2 = -\int_0^\pi (X')^2 + \alpha X^2 = 0$

$\Rightarrow \alpha < 0$ nebo X triv. $\Rightarrow$ Pp $\alpha = -\beta^2$

f.s.: $X(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$

$X'(x) = -a\beta\sin\beta x + b\beta\cos\beta x$

$X'(0) = 0 \Rightarrow b = 0$; $X(\pi) = 0 \Rightarrow \beta\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} + k$, $k \in \mathbb{Z}$

Ze symetrie cos stačí uvažovat $k \in \mathbb{N}_0$.

Dopočteme T: $T'' + \beta^2 T = 0 \Rightarrow T(t) = a\cos\beta t + b\sin\beta t$

Kandidát na řešení má tvar: $u(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \cos\left(\left(\frac{1}{2}+k\right)x\right)\left(a_k\cos\left(\frac{1}{2}+k\right)t + b_k\sin\left(\frac{1}{2}+k\right)t\right)$

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \cos(\beta_k x)\left(a_k\cos\beta_k x + b_k\sin\beta_k x\right),$$ kde jsme

označili $\beta_k = \frac{1}{2} + k$, $k \in \mathbb{N}_0$. $\{a_k\}$ a $\{b_k\}$ určíme z podmínek.

$$u_0(x) = u(0,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\cos\beta_k x \Rightarrow a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_0(s)\cos(\beta_k s)\,ds$$

$$u_1(x) = (\partial_t u)(0,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k\beta_k\cos\beta_k x \Rightarrow b_k = \frac{2}{\beta_k\pi}\int_0^\pi u_1(s)\cos(\beta_k s)\,ds.$$

– Je-li $u_0(x) = \cos\frac{x}{2}$, $u_1(x) = 0$ dostáváme řešení

$$u(t,x) = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{t}{2}\left(= \cos\beta_0 x \cdot \cos\beta_0 t\right).$$

Evidentně se jedná o klasické řešení: $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ a řeší rci i okr. a poč. podm.

Všechny fce $\{\cos \beta_k x\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ a tedy i kandidát na řešení jsou sudé podle $x = 0$ a liché podle $x = \pi$.

Tak se dá využít při důkazu úplnosti systému $\{\cos \beta_k x\}$ v $L^2(0, \pi)$.

Stačí si uvědomit, že $\left\{1, \cos \frac{kx}{2}, \sin \frac{kx}{2}\right\}$ je báze $L^2(-2\pi, 2\pi)$ a při uvedeném rozšíření vypadnou členy s $\sin \frac{kx}{2}$, a $\cos \frac{kx}{2}$ pro k sudé! a výsledné fce pro 4π per.

2) Charakteristická rce je $\dot{x} = \sqrt{|x|}$ tedy $y(t) = t + C$, pr. $C = 0$ s autonomie char. soustavy

$\dot{y} = 1$

$$2 \cdot \frac{\dot{x}}{2\sqrt{|x|}} = 1,$$

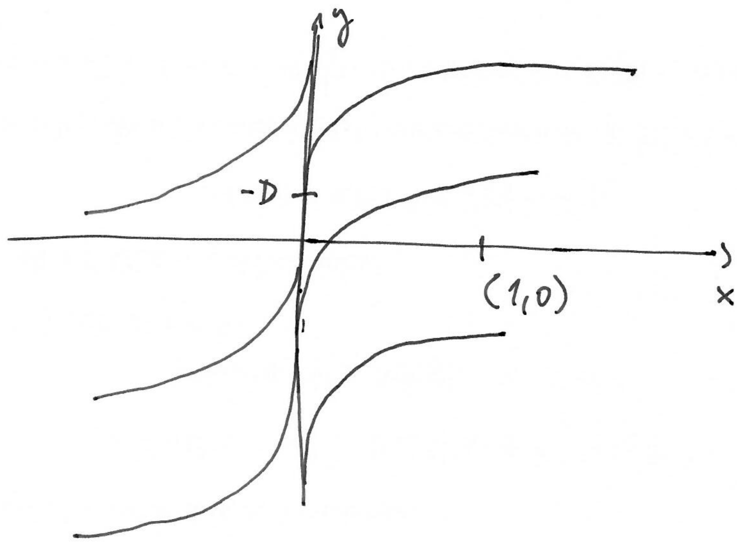
Pro $x > 0$: $(2\sqrt{x})^{\cdot} = (t+D)^{\cdot}$, $2\sqrt{x} = (t+D)$; $x(t) = \left(\frac{t+D}{2}\right)^2$ pro $t > -D$

$x = 0$: je řešení na $\mathbb{R}$

$x < 0$: $(-2\sqrt{-x})^{\cdot} = (t-D)^{\cdot}$, $\sqrt{-x} = \frac{D-t}{2}$; $x(t) = -\left(\frac{D-t}{2}\right)^2$ pro $t < D$.

Řešení je možné napojovat v $x = 0$.

Obr. charakteristik v rovině x, y:



Obecný tvar řešení na okolí bodu $(1,0)$: Potřebujeme, aby řešení okolí neprotínalo osu y. Víme, že pak $x > 0$; $2\sqrt{x} - y$ je konstantní podél charakteristik.

Obecný tvar řešení je $g(2\sqrt{x} - y)$. Tedy pro $u(x,0) = \exp(x)$:

$g(2\sqrt{x}) = \exp x$ a volíme $g(s) := \exp\left(\frac{s^2}{4}\right)$

Hledané řešení je tedy $u(x,y) = \exp\left(\frac{(2\sqrt{x}-y)^2}{4}\right)$.

Řešení úlohy s daty na žádném okolí bodu $(0,0)$ neex. Protože řešení je konstantní podél všech charakteristik, muselo by být konstantní na ose x. Problém má řešení na $\mathbb{R}^2$ pouze pro konstantní data na ose x.

3) Schéma je 1krokové, implicitní.

1) Stabilita dle Von Neumanna:

$g(\xi, \tau, h) = ?$ Označíme $\lambda = \frac{\tau}{h}$

$$g\left(1+e^{i\xi h}\right) - \left(1+e^{i\xi h}\right) + a\lambda\left(g\left(-1+e^{i\xi h}\right) + \left(e^{i\xi h}-1\right)\right) = 0$$

$$g\left(1-a\lambda+e^{i\xi h}(1+a\lambda)\right) = 1+a\lambda+e^{i\xi h}(1-a\lambda)$$

$$g(\xi,\tau,h) = \frac{1+a\lambda+e^{i\xi h}(1-a\lambda)}{1-a\lambda+e^{i\xi h}(1+a\lambda)} =$$

$$\frac{1+a\lambda+(1-a\lambda)\cos\xi h + i(1-a\lambda)\sin\xi h}{1-a\lambda+(1+a\lambda)\cos\xi h + i(1+a\lambda)\sin\xi h}$$

Tedy
$$|g|^2 = \frac{\left((1+a\lambda)+(1-a\lambda)\cos\xi h\right)^2 + \sin^2(\xi h)(1-a\lambda)^2}{\left((1-a\lambda)+(1+a\lambda)\cos\xi h\right)^2 + (1+a\lambda)^2\sin^2\xi h} =$$

$$= \frac{(1+a\lambda)^2+(1-a\lambda)^2+2(1+a\lambda)(1-a\lambda)\cos\xi h}{(1-a\lambda)^2+(1+a\lambda)^2+2(1+a\lambda)(1-a\lambda)\cos\xi h} = 1$$

Schéma je nepodmíněně stabilní!

2) <u>Konzistence</u>

a) $\frac{u(t+k,x)-u(t,x)}{k} + \frac{a}{h}\left(u(t+k,x+h)-u(t+k,x)\right) \overset{\text{v bodě } (t+k,x)}{=}$

$$\partial_t u(t+k,x) + O(k) + a\,\partial_x u(t+k,x) + O(h) = (*)$$

b) $\frac{u(t+k,x+h)-u(t,x+h)}{k} + \frac{a}{h}\left(u(t,x+h)-u(t,x)\right) \overset{\text{v bodě } (t,x+h)}{=}$

$$\partial_t u(t,x+h) + a\,\partial_x u(t,x+h) + O(k) + O(h) = (+)$$

c) $\partial_t u(t+k,x)$ i $\partial_t u(t,x+h)$ je $\partial_t u(t,x) + O(k) + O(h)$

podobně $\partial_x u(t,x+h)$ i $\underbrace{\partial_x u(t+k,x)}_{\text{je } \partial_x u(t,x)} + O(k) + O(h)$

$$\frac{1}{2}\left((*)+(+)\right) - \left(\partial_t u(t,x) + a\,\partial_x u(t,x)\right) = O(h) + O(k)$$

Tedy schéma je konzistentní!