

1) Vypočítejte konvergenční ~~test~~ integrálu:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{3/2}} dx$$

2) Vypočítejte konvergenční integrál závislý na parametru.

$$\int_0^1 t^\alpha \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

3) Společně limity pro více proměnných; pokud existují.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|x|+|y|}^3}{x^2+y^2}$$

Ad 1) $f(x) := \frac{\sin^2 x}{x^{3/2}}$ je vyjádřená na $(0, +\infty)$, máme problém pouze u 0 a $+\infty$

u 0 : $\frac{f(x)}{\frac{1}{x^{3/2}}}$ $\xrightarrow{x \rightarrow 0}$ 1 tedy i $\int_0^1 f(x) dx$ kon. dle scov. kr.

u $+\infty$: $\left| \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{3/2}}} \right| \leq 1$ tedy i $\int_{100}^{+\infty} f(x) dx$ kon. dle rovnámcího kritéria

→ integrál konverguje.

Ad 2) Provádíme substituci: $\int_0^1 \frac{t^{\alpha+2}}{t^2} \sin \frac{1}{t} dt = \int_1^{+\infty} s^{-(\alpha+2)} \sin s ds$
 $\frac{1}{t} = \varphi(t), \varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} = -\varphi^2(t)$

~~Ad 1)~~ Tedy integrál kon. absolutně pro $\alpha+2 > 1$, tj. $\alpha > -1$.

a) neabsolutně $\alpha+2 \in (0, 1)$, tj. $\alpha \in (-2, -1]$

c) diverguje $\alpha+2 \leq 0$ $\alpha \leq -2$.

a) rovnámcí krit., b) Dirichlet, c) Weierstrass-Cauchy.

Ad 3) limity nek. Gha' vektor $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ a $\left(0, \frac{1}{n}\right)$.