2. zkoušková písemka, úterý 29.5.

I) [10b] Nalezněte řešení Laplaceovy rovnice $\Delta u = 0$ na $(0,\pi)^2$ s okrajovou podmínkou $u(x,\pi) = u_0(x)$, $u(x,0) = 0$ pro $x \in (0,\pi)$ a $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ pro $y \in (0,\pi)$.

Ukažte, že řešení splňuje $u \in C^\infty((0,\pi)^2)$, pokud $u_0 \in L^1(0,\pi)$.

Najděte řešení pro $u_0(x) = \sin(x)\cos(x)$.

Najděte řešení s okrajovou podmínkou $u(x,\pi) = \sin(x)\cos(x)+\pi x$, $u(x,0) = 0$ pro $x \in (0,\pi)$ a $u(0,y) = 0$, $u(\pi,y) = \pi y$ pro $y \in (0,\pi)$. Hledejte polynom p 2. řádu, který splňuje $\Delta p = 0$ v $\mathbb{R}^2$, $p(x,\pi) = \pi x$, $p(x,0) = 0$ pro $x \in (0,\pi)$ a $p(0,y) = 0$, $p(\pi,y) = \pi y$ pro $y \in (0,\pi)$.

II) [10b] Najděte všechny charakteristiky rovnice $\partial_x u + 2xy^2 \partial_y u = 0$.

Určete obecný tvar řešení.

Najděte řešení na jistém okolí U bodu $(0,0)$, které splňuje $u(0,y) = \sin(y)$ pro $(0,y) \in U$.

Je možné nalézt toto řešení na $U = \mathbb{R}^2$?

Jaké hodnoty nabývá toto řešení na $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < -1/x^2\}$?

Je určeno jednoznačně?

III) [10b] Uvažte numerické schéma

$$v_m^{n+1} = \frac{1}{2}(v_{m+1}^n + v_{m-1}^n) - \frac{1}{2}akh^{-3}(v_{m+2}^n - 2v_{m+1}^n + 2v_{m-1}^n - v_{m-2}^n) + kf_m^n$$

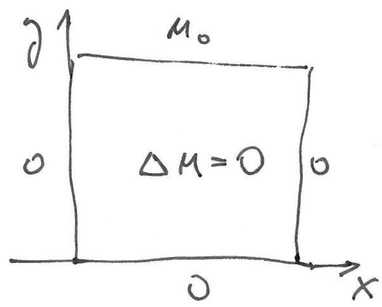
pro rovnici $\partial_t u + a\partial_x^3 u = f$.

- Rozhodněte, zda je schéma explicitní nebo implicitní, tříkrokové nebo jednokrokové.
- Pro která $k, h > 0$ je schéma stabilní?
- Najděte správný tvar schématu pro konzistenci. Kdy je schéma konzistentní?
- Na jakých oblastech stability je schéma stabilní a konzistentní zároveň?

1) Nalezněte řešení Laplaceovy rovnice $\Delta u = 0$ v $(0,\pi)^2$ s okrajovými podmínkami

$$\left.\begin{aligned} u(x,\pi) &= u_0(x) \\ u(x,0) &= 0 \end{aligned}\right\} x \in (0,\pi)$$

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \quad y \in (0,\pi)$$



Řešení: 1) Separace proměnných: $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \quad ; \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \text{v } (0,\pi)$$

$$X(0) = X(\pi) = 0$$

Víme, že $\lambda < 0$, jinak nelze splnit okrajové podm. Pak

f.s.: $X(x) = \sin(\sqrt{-\lambda}\, x)$, $\cancel{\cos(\sqrt{-\lambda}\, x)}$

$$\sqrt{-\lambda}\,\pi = n\pi \implies \lambda = -n^2 \; ; \; n \in \mathbb{N}$$

$$\implies X_n(x) = \sin(n\pi) \; ; \; \lambda_n = -n^2$$

Dopočteme Y: $Y'' + \lambda Y = 0$; $Y'' - n^2 Y = 0$

f.s.: e^{ny} ; e^{-ny} , Podm. $Y(0) = 0 \implies$

$$Y_n(y) = \sinh(ny)$$

Řešení hledáme ve tvaru: $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \sinh(ny) \sin(nx)$

Dosazení $y = \pi$:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \sinh(n\pi) \sin nx = u_0(x)$$

$\{\sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$ je báze $L^2(0,\pi)$, Musí tedy platit:

$$\alpha_n \sinh(n\pi) = \int_0^\pi \sin nx \, u_0(x)\,dx \Big/ \int_0^\pi (\sin nx)^2\,dx$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\sinh(n\pi)} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nx)\, u_0(x)\,dx$$

Celkový tvar řešení tedy je:

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\frac{\sinh ny}{\sinh n\pi}\,\sin nx \int_0^{\pi} \sin(ns)\,u_0(s)\,ds}_{p_n}$$

2

Ukažte, že $u \in C^\infty((0,\pi)^2)$, je-li $u_0 \in L^1(0,\pi)$.

Stačí ukázat, že formální derivace řady konvergují st. lokálně na $(0,\pi)^2$.

Formální derivace mají tvar

$$D_\varkappa := n^\varkappa \frac{SCH(ny)}{\sinh(n\pi)}\, SC(nx) \int_0^\pi \sin(ns)\,u_0(s)\,ds$$

kde $SCH \in \{\sinh, \cosh\}$, $SC \in \{\sin, \cos\}$.

Integrál je omezený $\|u_0\|_{L^1(0,\pi)}$. Tedy

$$|D_\varkappa| \le n^\varkappa \|u_0\|_{L^1(0,\pi)} \frac{\cosh(ny)}{\sinh(n\pi)} = n^\varkappa \|u_0\|_{L^1(0,\pi)} \frac{e^{ny}+e^{-ny}}{e^{n\pi}-e^{-n\pi}}$$

$$\le n^\varkappa e^{n(y-\pi)} \frac{1+e^{-2ny}}{1-e^{-2n\pi}}$$

Pro $y \in (\alpha,\beta) \subset [\alpha,\beta] \subset (0,\pi)$: $|D_\varkappa| \le n^\varkappa e^{-n(\pi-\beta)} \dfrac{2}{1-e^{-2n\pi}}$

$\le \text{const.}\,\frac{1}{n^2}$ pro nějakou const.

závislou na $\varkappa$, ale ne na n, x, y.

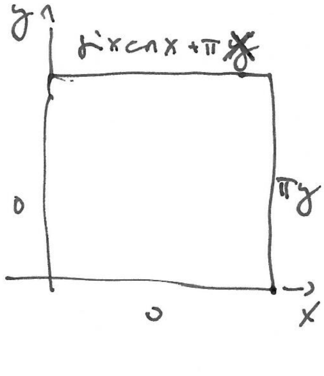
Najděte řešení s $u_0(x,\pi) = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

$$u(x,y) = \frac{\sinh 2y}{2\sinh(2\pi)}\sin(2x)$$

2

Najděte řešení s okrajovou podm.:

$$u(x,\pi) = \sin x\cos x + \pi x$$
$$u(x,0) = 0$$
$$u(0,y) = 0$$
$$u(\pi,y) = y\pi$$



(pomocné řeš.)

Hledejte p, které splňuje $p(x,y) = \begin{cases} \pi x & y=\pi \\ 0 & y=0 \\ 0 & x=0 \\ y\pi & x=\pi \end{cases}$ a $\Delta p = 0$.

$$u(x,y) = \frac{1}{2} \frac{\sinh(2y)}{\sinh(2\pi)} \sin(2x) + xy$$

2) Nalezněte všechna řešení rovnice

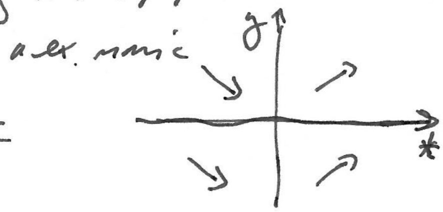
[redacted] $\partial_x u + 2xy^2 \partial_y u = 0$

1) Charakteristický systém:

$\dot{x} = 1$ $\qquad x(t) = t \qquad$ pp., že konst. je 0.

$\dot{y} = 2xy^2$ $\qquad$ 1

$\dot{y} = 2ty^2$; triv. řešení $0 = y$; řešení je jednoznačné



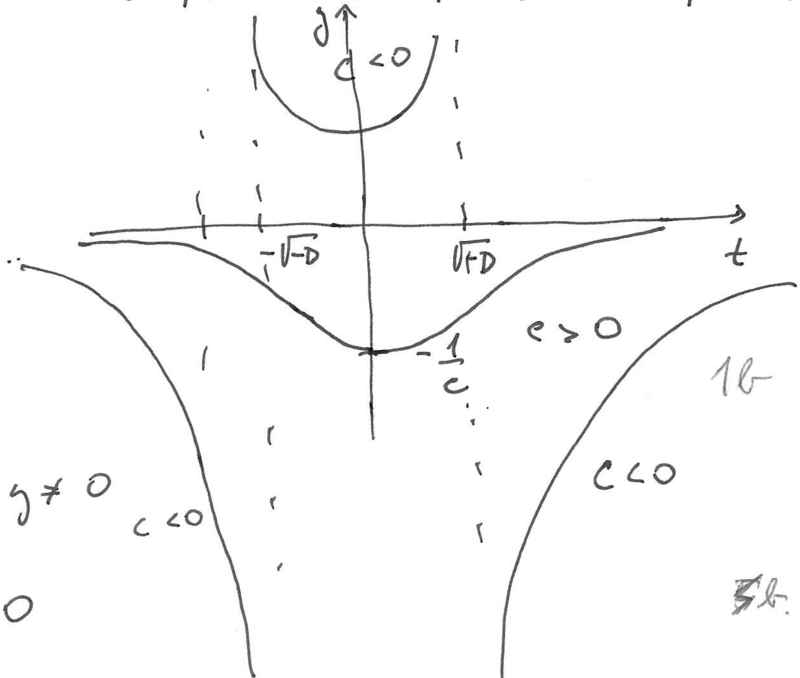
$\frac{\dot{y}}{y^2} = 2t$; $\left(-\frac{1}{y}\right)^{\cdot} = (t^2 + c)^{\cdot}$, $-\frac{1}{y} = t^2 + c$

pro $y \neq 0$: $y = \frac{-1}{t^2 + c}$

$y(t) = -\frac{1}{t^2 + c}$ na $\mathbb{R}$ pro $c \geqslant 0$

na $(-\infty, -\sqrt{-c})$ a $(\sqrt{-c}, +\infty)$ a $(-\sqrt{-c}, \sqrt{-c})$ pro $c < 0$

Graf charakteristik:



Na charakteristikách

$\frac{1}{y} + x^2 =$ konst.

Hledané u splňuje

$$u(x,y) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{y} + x^2\right) & y \neq 0 \\ c & y = 0 \end{cases}$$

Najděte řešení pro které $u(0,y) = \sin y$ kol. v okolí bodu $(0,0)$.

Po dosazení: $u(0,y) = f\left(\frac{1}{y}\right) = \sin y$ a stačí zvolit $f(s) = \sin\left(\frac{1}{s}\right)$

Hledané řešení tedy je

$$u(x,y) = \begin{cases} \sin\left(\frac{y}{1 + x^2 y}\right) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

2 b.

[redacted] Jsou předpoklady lokální na množině $\{y < -\frac{1}{x^2}\}$ vyrovnatelné? NE! 1

Ex. řešení na $\mathbb{R}^2$? Je jednoznačné? NEEX. ... Nebylo by spoj. v bodech $(x, 1 - \frac{1}{x^2})$.

3) Uvažte numerické schéma

$$v_m^{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_{m+1}^n + v_{m-1}^n\right) - \frac{1}{2} a k h^{-3}\left(v_{m+2}^n - 2v_{m+1}^n + 2v_{m-1}^n - v_{m-2}^n\right) + k f_m^n$$

pro rovnici $u_t + a u_{xxx} = f$.

Najděte jeho vlastní (normalizovaný) tvar a zjistěte konzistenci.

Vyšetřete stabilitu.

Pro které hodnoty parametrů k, h je schéma konzistentní a stabilní současně!

Vlastní tvar zní:

$$\frac{v_m^{n+1} - \frac{1}{2}\left(v_{m+1}^n + v_{m-1}^3\right)}{k} + \frac{1}{2} a \frac{1}{h^3}\left(v_{m+2}^n - 2v_{m+1}^n + 2v_{m-1}^n - v_{m-2}^n\right) = f_m^n$$

Taylor z (kn, hm):

$$\frac{1}{k}\left(u_m^{n+1} - \frac{1}{2}\left(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n\right)\right) - u_t(\cdot) = \frac{1}{k}\left(u_m^n + k u_t + \frac{k^2}{2}u_{tt} + O(k^3)\right) -$$

$$\frac{1}{2}\left(2u + 2\frac{h^2}{2}u_{xx} + O(h^3)\right) - u_t = O(k) + O\left(\frac{h^2}{k}\right)$$

$$\frac{1}{2} a \frac{1}{h^3}\left(2\cancel{u_x 2h} + 2u_{xxx}\frac{(2h)^3}{6} + O(h^5) - \cancel{4u_x h} - 2\cdot 2u_{xxx}\frac{h^3}{6} + O(h^5)\right)$$

$= a u_{xxx} + O(h^2)$. Tedy řád přesnosti je $O(k) + O\left(\frac{h^2}{k}\right) + O(h^2)$

Pro konzistenci je třeba, aby $\frac{h^2}{k} \to 0$ pro $(k,h) \to (0,0)$

Amplifikační faktor:

$$g(\xi, k, h) = \cancel{\tfrac{1}{2}} \cos h\xi - \frac{1}{2} a k h^{-3} 2i \left(\sin(2h\xi) - 2\sin(h\xi) \right)$$

$$= \cos(h\xi) - a k h^{-3} i \; 2 \sin h\xi \, (\underbrace{\cos h\xi - 1}_{-2\sin^2 \frac{h\xi}{2}})$$

$$= \cos(h\xi) + a k h^{-3} i \, \underline{\sin h\xi} \, \sin^2 \frac{h\xi}{2}$$

$$|g|^2 = \cos^2(h\xi) + \sin^2(h\xi) \underline{\left| (a k h^{-3})^2 \sin^4\left(\frac{h\xi}{2}\right) 4^2 \right|}$$

$\Rightarrow$ Podm. stability: $4|a| k h^{-3} \le 1$

$$\Rightarrow \quad 4\frac{|a|}{h} \le \frac{h^2}{k}$$ a tedy pokud $h \to 0$ je i $\frac{h^2}{k} \to +\infty$.

Schéma není v žádné oblasti stability stabilní a konzistentní zároveň.