Úvod

Petr Kaplický: kaplicky(at)karlin.mff.cuni.cz, www.karlin.mff.cuni.cz/˜kaplicky, budova Karlín, 2. patro, Katedra matematické analýzy

Podmínky zápočtu: Budeme psát 3 zápočtové písemky (na úrovni mírně lehčí zkouškové písemky). Témata písemek jsou: 1) limity, 2) konvergence řad, 3) průběh funkce. Každá písemka se bude skládat ze 3 příkladů. Příklady budu hodnotit binárně (správně, chybně). Pokud budete mít dva příklady správně, je písemka úspěšně napsaná. Pokud úspěšně napíšete 2 písemky, získáte zápočet. Pokud máte nadpoloviční účast na cvičení je možné jednu úspěšně napsanou písemku nahradit spočítaním 10 příkladů podle zadání vedoucího cvičení. Podmínky zápočtu neumožňují opravné pokusy.

Konzultace: když bude čas, tak před nebo po cvičení, po emailové domluvě v kanceláři v Karlíně

Související výuka:

1. Matematický proseminář I - NMUM161: Výběrový seminář je určen pro studenty prvního ročníku. Jeho cílem je procvičit středoškolskou matematiku a upevnit základní matematické dovednosti (zejména elementární funkce, rovnice, analytická geometrie, komplexní čísla, důkazové techniky). Posilováno bude exaktní matematické vyjadřování, rozvíjeno myšlení, diskutovány symbolické zápisy a jejich jazyková interpretace apod. Řešeny budou zajímavé a netradiční příklady.
2. Tutor: karlin.mff.cuni.cz/˜tutorkma, tutor.kma(at)matfyz.cz - Tutor je oficiální konzultant pro studenty prvního dvouletí MFF UK. Tutoriál k matematické analýze je organizován Katedrou matematické analýzy MFF UK a je zcela zdarma.
3. Proseminář z Matematické analýzy - NMMA161: Proseminář bude věnován náročnější látce doplňující kurz Matematická analýza 1. Bude rozšiřovat a prohlubovat znalosti z Matematické analýzy.
4. Řešitelský seminář - NMMA465: Řešení problémů a úloh z matematické analýzy, algebry a diskrétní matematiky. Příprava na matematické soutěže vysokoškoláků.

Cvičení 4.10.2017

Nerovnice a rovnice

Spočteno: **1.** $\sqrt{x^2+2x-3} \geq \sqrt{x^2+3x-4}$

Zadáno do lavic: **2.** $\sqrt{x-2} - \sqrt{x-5} = 1$ **3.** $||x-3|-2| = 1$

Další: **4.** $|3x-1| < x < |3x+1|$ **5.** $3x-1 < |x| < 3x+1$ **6.** $|x+1| - |2x+4| \leq x+4$ **7.** $\cos(x) < \frac{1}{2}$ **8.** $\cos^2(x) > \sin^2(x)$ **9.** $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+3) \geq 0$ **10.** $|\log_e(x)| < 1$ **11.** Řešte nerovnici v závislosti na parametru $c \in \mathbb{R}$: $x^2 - cx + 1 < 0$

Matematická indukce

Dokažte matematickou indukcí následující rovnosti a nerovnosti

Spočteno: **12.** $\forall n \in \mathbf{N} : 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **13.** $\forall n \in \mathbf{N} : (2n)! < 2^{2n}(n!)^2$

Do lavic: **14.** $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 4 : 2^n \geq n^2$ **15.** $\forall n \in \mathbf{N}, x > -1 : (1+x)^n \geq 1 + nx$

Další: **16.** $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ **17.** $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ **18.** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ (binomická věta) **19.** $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$, $x_i \geq -2$, x_i mají stejná znaménka

Teoretický domácí úkol: **20.** Ukažte, že čísla $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2} + \sqrt{3}$ jsou iracionální.

Výsledky a návody: **1.** $x \in (-\infty, -4] \cup \{1\}$ **2.** $x = 6$ **3.** $x \in \{0, 2, 4, 6\}$ **4.** $x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ **4.** $x \in (1/4, 1/2)$ **5.** $x \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ **5.** $x \in (-1/4, 1/2)$ **6.** $x \in \mathbb{R}$ **6.** $x \in \mathbf{R}$ **8.** $x \in (-\pi/4, \pi/4) + k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$ **9.** $x \in (1, 2)$ **10.** $x \in (1/e, e)$ **11.** pro $c \in [-2, 2]$ jsou je řešení $x \in \emptyset$, pro $c \in (-\infty, 2) \cup (-2, +\infty)$ je to $x \in (c/2 - \sqrt{c^2/4 - 1}, c/2 + \sqrt{c^2/4 - 1})$ **20.** Pro $\sqrt{2}$: Důkaz sporem. Předpokládejte, že $\sqrt{2} = k/l$, kde $k, l \in \mathbf{N}$ nesoudělné a ukažte, že k i l jsou dělitelné 2.

Cvičení 5.10.2017

Ještě matematická indukce

Spočteno: **21.** Dokažte: $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 3 : (n+1)^n \leq n^{n+1}$ **22.** Ukažte, že čísla $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2} + \sqrt{3}$ jsou iracionální.

Výroky a logika

Spočteno:

Dokažte, že platí **23.** $A \Rightarrow A$ **24.** $(\mathrm{non}\,(A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow (A \wedge (\mathrm{non}\,B))$

Zapište negace výroků a rozhodněte, který z výroků je pravdivý. **25.** $\forall x, y \in \mathbf{R} : x^2 + y^2 > 0$ **26.** $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{N} : (y \leq x) \wedge (y + 1 > x)$ **27.** $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbf{R} : (0 < |x - 1| < \delta) \implies |x - 3| < \epsilon$

Teoretický domácí úkol: **28.** $\forall n \in \mathbf{N} : \sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n} \leq \dfrac{1}{n}(x_1 + \ldots x_n)$, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (AG nerovnost)

Další:

29. $\exists x \in \mathbb{R} : \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ **30.** $\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 = (x+1)^2$

Platí následující výroky? **31.** $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$

Hádanky z ostrova poctivců a padouchů (podle R. Smullyana a L. Picka): **32.** Jdete kolem tří obyvatel ostrova a zeptáte se: „Kolik je mezi vámi poctivců?“ A odpoví nezřetelně, tak se zeptáte B: „Co říkal A?“ B odpoví: „A říkal, že je mezi námi jediný poctivec.“ Nato řekne C: „Nevěřte B, ten lže!“ Co jsou B a C? **33.** A řekne: „Buď jsem já padouch a nebo B je poctivec.“ Co jsou A a B? **34.** A řekne: „Já jsem padouch, ale B je poctivec.“ Co jsou A a B? **35.** A řekne: „B a C mají stejnou povahu.“ Nato se zeptáte C: „Mají A a B stejnou povahu?“ Co odpoví C?

Cvičení 11.10.2017

Plán: množiny, zobrazení, supremum.

Spočteno: **AG nerovnost, 36, 44-3, 40, 42**

DÚ: Vymyslete protipříklad na obrácenou inkluzi v **44-3**

Množiny a zobrazení

Dokažte: **36.** Nechť A_i, $i = 1, 2, \dots$ je systém libovolných množin a nechť $B_n = \cup_{i=1}^n A_i$. Potom $\cup_{n=1}^\infty A_n = \cup_{n=1}^\infty B_n$ a pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí $B_n \subset B_{n+1}$. **37.** Je-li navíc $C_{n+1} = B_{n+1} - B_n$ pro $n \in \mathbf{N}$, $C_1 = B_1$, pak platí opět $\cup_{n=1}^\infty A_n = \cup_{n=1}^\infty C_n$ a navíc pro $j, k \in \mathbf{N}$, $j \neq k$ je $C_j \cap C_k = \emptyset$.

Určete definiční obory a načrtněte grafy funkcí **38.** $f(x) = 2 + \sin(\frac{x}{2})$ **39.** $f(x) = 1 - |\log(x)|$ **40.** $f(x) = \log(\log(\sin(x)))$ **41.** $f(x) = ||||x| - 1| - 1| - 1|$ Najděte definiční obor a obor hodnot funkce **42.** $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$

43. Věta 4: Buď f prosté zobrazení. Pak platí 1) $D(f^{-1}) = R(f)$, 2) $D(f) = R(f^{-1})$, 3) f^{-1} je zobrazení, 4) f^{-1} je prosté, 5) $f^{-1} \circ f = id_{D(f)}$, 6) $f \circ f^{-1} = id_{R(f)}$

44. Věta 3: Nechť $f : A \to B$, $M_1, M_2 \subset D(f)$, P_1, P_2 libovolné množiny. Pak 1) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$, 2) $f_{-1}(P_1 \cup P_2) = f_{-1}(P_1) \cup f_{-1}(P_2)$, 3) $f(M_1 \cap M_2) \subset f(M_1) \cap f(M_2)$, 4) $f_{-1}(P_1 \cap P_2) = f_{-1}(P_1) \cap f_{-1}(P_2)$, 5) $f(M_1 \setminus M_2) \supset f(M_1) \setminus f(M_2)$, 4) $f_{-1}(P_1 \setminus P_2) = f_{-1}(P_1) \setminus f_{-1}(P_2)$

45. Pro která f platí rovnost v předchozích bodech 3) a 5)?

. . . . 12.10.2017

Plán: supremum, infimum

[Z, 21-24],

46. Nalezněte suprema a infima následujících množin: $M_1 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$, $M_2 = \{\frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbf{N}\}$, $M_3 = [0, 1)$, $M_4 = \{2^{-n} : n \in \mathbf{N}\}$, $M_5 = \{\frac{p}{p+q} : p, q \in \mathbf{N}\}$

DÚ: **47.** Buď $y \in [0, +\infty)$, $n \in \mathbf{N}$, $M = \{x \in (0, +\infty) : x^n > y\}$. Pak existuje $\inf M$ a platí $y = (\inf M)^n$. Důsledek: existuje funkce n-tá odmocnina.

. . . . 18.10.2017

limity - aritmetika (polynomy a jejich podíly) - $\{1/n\}$, $\{1/n^k\}$, $\{n\}$, $\{n^k\}$, $k \in \mathbf{N}$, [H, cv.3, př. 1,2,3,9], rychlost růstu [Z, 25, 28], růstová škála a^n/n^k, $a > 1$ a $k \in \mathbf{N}$.

DÚ: Dokažte: [Z, 1]

. . . . 19.10.2017

typické posloupnosti-růstová škála [H, cv. 3],

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{\lg n} = +\infty, \qquad \alpha > 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty, \qquad k \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty, \qquad a > 1, k \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{b^n} = +\infty, \qquad b > 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(\frac{n}{a})^n} = +\infty, \qquad a > e,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\frac{n}{a})^n}{n!} = +\infty, \qquad a \in (0, e),$$

Lemma (bez dk):

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : (\frac{n}{e})^n < n! < e^2(\frac{n}{e})^{n+1}, \text{ kde } e = \lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n})^n.$$

růstová škála [Z, 31], odstranění odmocnin [Z, 27, 29, 39],

DÚ: Ukažte: Je-li $a_n := (\sum_{j=1}^n 1/j)/n$, platí $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

. . . . 25.10.2017

Řešení DÚ z minulé hodiny, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$, $k \in \mathbb{Z}$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$, strážníci [Z, 30], [H4, 3], aritmetika limit s nekonečny [Z, 38, 41], [Z, 33]

DÚ: [Z, 59]

. . . . 26.10.2017

Eulerovo číslo [Z, 43-46, 49,59]

. . . . 1.11.2017

test znalostí:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n}} \tag{1}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n + 3^n} \tag{2}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n + n! + e^n}{1 + n^n + n^4}, \tag{3}$$

rekurentní posloupnosti [Z,50], [Z,62,63], limes inferior a superior [Z, 65 a,b]

DÚ: [Z, 34]

. . . . 2.11.2017 řešení domácího úkolu, orientační test podobný testu z 1.11., konvergence geometrické řady a řady $\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha$, konvergence řad pomocí srovnávacího kritéria ala [K2, 5.1, 31,39,46]

. . . . 8.11.2017

děkanský den

. . . . 9.11.2017

1. zápočtová písemka, konvergence řad s kladnými členy pomocí limitního srovnávacího kriteria.

DÚ: Spočtěte: $\sum_{n=1}^{N} nq^n$.

. . . . 15.11.2017

cvičná písemka, přibližně: $\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{n}(\sqrt{n^2+n^{-\frac{1}{2}}} - \sqrt{n^2+n^{-\frac{1}{3}}})$, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^n$,konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{(n+2)(n+\sqrt[n]{n})}$,

konvergence řad pomocí podílového, odmocninového kriteria [K2, 5.3, 82, 92, 98]

DÚ: Najděte posloupnost kladných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ takovou, že pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_{n+1}/a_n \geq 1$ a přece $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.

. . . . 16.11.2017

Příklady na konvergenci řad s nezápornými členy podle [K2, Sekce 5.2], pro počítání v lavicích bylo zadáno [K2, Sekce 5.2, 90, 94, 97, 100, 109, 117], bylo ukázáno, že

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\sqrt[3]{n}}}{(\sqrt[3]{n})^k} = +\infty, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

DÚ: Dokažte: *Buďte $B_n : \{1,\dots,5\} \to \{1,\dots,5\}$ bijekce pro $n \in \mathbb{N}$. Buď $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ řada. Definujme $b_{5n+k} = a_{5n+B_n(k)}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \{1,\dots,5\}$. Ukažte, že $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.*

. . . . 22.11.2017

cvičná písemka: vyšetřete konvergenci řad $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n!\pi/100)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n)/n^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n n!/(2n)^n$.

absolutní a neabsolutní konvergence řad, absolutní konvergence implikuje konvergenci, obráceně to neplatí, klasický protipříklad je řada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n/n$, Leibnizovo kriterium - monotonie je nutná, jinak tvrzení neplatí, př. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(-1)^n/n$.

Příklady: [K2, Sekce 5.3, 136-145]

DÚ: Přerovnejte řadu $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n/n$ tak, aby konvergovala.

. . . . 6.12.2017 cvičná písemka: vyšetřete konvergenci řad

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{k^3+1} - \sqrt{k^2+1}}{\sqrt[10]{k}}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{\sqrt[k]{1+3^{(k^2)}}} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \cos(e\pi k) \sin(\frac{ek}{k^2+1}).$$

DÚ: Najděte funkce $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x_0, A, B \in \mathbf{R}$ takové, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{y\to A} g(y) = B$, ale neplatí, že $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = B$. Může se stát, že za této situace $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$ existuje, ale nerovn8 se B?

limity funkcí: podíly polynomů a odstraňování odmocnin, [K1, Sekce 3.1, řešené přílady A-D a v lavici 1,3,7].

. . . . 13.12.2017

limity funkcí: cvičný test na odstraňování odmocnin [K1, 3.1, 1, 20, 53], opakování základních limit, limity inverzí pomocí věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1, \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg}(x)}{x} = 1, \tag{5}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arccos(x) - \frac{\pi}{2}}{x} = -1, \tag{6}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arccotg}(x) - \frac{\pi}{2}}{x} = -1, \tag{7}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x \,\mathrm{arccotg}(x) = 1 \tag{8}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(x)) = 1, \tag{9}$$

metoda počítání složitějších limit ohlodáváním pomocí aritmetiky limit a znalosti základních limit.

. . . . 14.12.2017

cvičná písemka: [K1, 3.1, 52, 56], $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x)}{x-\pi}$

limity typu $\lim_{x\to x_0} (g(x))^{f(x)}$: [K1, 3.1, 103, 104, 90]

obtížnější vícekrokové limity: [K1, 3.1, 89]

. . . . 21.12.2017

cvičná písemka:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{\frac{1+x}{2}} - \sqrt{x}}{x-1}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{\sin^2(\pi x)}.$$

spojitost: funkce všude nespojitá, funkce spojitá právě v jednom bodě, ve dvou bodech, ve třech bodech, v $\mathbf{N}$. Do příště si rozmyslete, zda chcete projít důkaz spojitosti Riemannovy fce v iracionálních číslech. Důkaz spojitosti funkce na definičním oboru pomocí vět o spojitosti, dodefinování funkce spojitě pro fci z [K1, 3.2, 96].

derivace: opakování derivací elementárních funkcí, x, x^n, exp, lg, sin, arcsin.

DÚ: Definujte funkci $\sinh(x) = (\exp(x) - \exp(-x))/2$ pro $x \in \mathbf{R}$. Je rostoucí. Ukažte, že je spojitá. Inverzi k ní označte argsinh a spočtěte $\sinh'$ a $\operatorname{argsinh}'$.

. . . . 22.12.2017

Vyřešení DÚ, derivace $\lg(\lg(\sin(x)))$, $\arcsin(2x/(x^2+1))$ i jednostranné, $x^2 \sin(1/x^2)$ i v nule. Příklady na procvičení: [K1, 4.2, 19, 18, 6b, 33, 27]

. . . . 3.1.2018

počítání limit posloupností pomocí Heineovy věty a limit funkcí [Z, par. 16], $\lim_{n\to+\infty} n((\cos(1/n)^n - 1)$

ověřování monotonie posloupností pomocí derivací funkcí ala [Z, 294]

l'Hospitalovo pravidlo [Z, par. 25, par. 27], $\lim_{x\to 0} x^{-3}(\sin(x) - \arcsin(x))$.

. . . . 4.1.2018

limity pomocí l'Hospitalova pravidla

. . . . 10.1.2018

průběhy funkcí: [Z, 126], $f(x) = \lg(x)/\sqrt{x}$, bump function $f(x) = \exp(1/(1 - x^2))$ pro $x \in (-1, 1)$, $= 0$ jinak.

. . . . 11.1.2018

průběhy funkcí: dokončení průběhu bump funkce, [Z, 129].

Reference

[Z] L. Zajíček: Vybrané úlohy z matematické analýzy, matfyzpress, 2002.

[K1] J. Kopáček a kol.: Příklady z matematiky pro fyziky 1 matfyzpress, 2002.

[K2] J. Kopáček a kol.: Příklady z matematiky pro fyziky 2, matfyzpress, 1996.