2016 ZS – 2. zápočtový test, var. A

1) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\lg n}{\sqrt{n}}\right)\cdot\frac{\sqrt{n}}{\lg(n^3+2)} = L_1$

2) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \left(\frac{x+2}{4-x}\right)^{\frac{1}{\sin \pi x}} = L_2$

3) $\displaystyle \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{\lg n}\right)$

Řešení: 1) (17) $\displaystyle L_1 \overset{\uparrow}{=} \lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{\lg x}{\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{\sqrt{x}}{\lg(x^3+2)} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\sin\frac{\lg x}{\sqrt{x}}}{\frac{\lg x}{\sqrt{x}}}}_{\to 1}\cdot\frac{\lg x}{\lg(x^3+2)}$

Heine – podle PS

vnitřní: $\frac{\lg x}{\sqrt{x}} \to 0 \quad x\to+\infty$

$\neq 0 \quad x>1$

$\displaystyle \overset{AL}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\lg x}{\lg\left(x^3\left(1+\frac{2}{x^3}\right)\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\lg x}{3\lg x + \lg\left(1+\frac{2}{x^3}\right)} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

2) (22) $\displaystyle L_2 = \lim_{x\to 1} \exp\left(\frac{1}{\sin\pi x}\lg\left(\frac{x+2}{4-x}\right)\right)$, Spočteme $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sin\pi x}\lg\left(\frac{x+2}{4-x}\right) =$

$\displaystyle = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sin\pi(x-1+1)}\cdot\underbrace{\frac{\lg\left(\frac{x+2}{4-x}\right)}{\frac{x+2}{4-x}-1}}_{\to 1}\cdot\frac{x+2-4+x}{4-x} \overset{AL}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sin\pi(x-1+1)}\cdot\frac{2(x-1)}{3}$

vnitřní: $\frac{x+2}{4-x}\to 1$

$x+2 \neq 4-x$ pro $x\neq 1$

$2x \neq 2$

$x \neq 1$

$y = x-1$

$\displaystyle \overset{VoLSF}{=} \lim_{y\to 0}\frac{2y}{3\sin(\pi y+\pi)} = \lim_{y\to 0}\frac{2y\pi}{\underbrace{\sin\pi y}_{\to 1}\underbrace{\cos\pi}_{-1}}\cdot\frac{1}{3\pi} = -\frac{2}{3\pi}$, tedy $L_2 = e^{\frac{-2}{3\pi}}$

(28)

3) Řada konverguje dle Dirichletova kritéria, protože

- $\{\cos\frac{n\pi}{3}\}$ má omezené č. součty
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{\lg n} = 0$
- $\{\lg n\}$ je rostoucí, $\{\frac{1}{\lg n}\}$ je klesající a $\{\sin(\frac{1}{\lg n})\}$ je klesající (od $n_0 = 3$) ← jistě

protože $\frac{1}{\lg n} \in (0, \frac{\pi}{2})$

Řada není absolutně, protože

$$\sum_{n=2}^{3N} \left|\cos\frac{n\pi}{3}\right| \left|\sin\left(\frac{1}{\lg n}\right)\right| \geq \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin\left(\frac{1}{\lg 3k}\right)}{\frac{1}{\lg 3k}} \cdot \frac{1}{\lg 3k}$$

a poslední řada konverguje podle limitního srovnávacího kritéria, protože

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{\lg 3k}\right)}{\frac{1}{\lg 3k}} \to 1 \text{ pro } k\to+\infty \text{ a } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lg(3k)} \text{ diverguje.}$$

(popř. srovnáním s $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$.)