1. zápočtová písemka - nmma 101 - ZS - 2016
var. A

1) Spočtěte

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n^2-\sqrt{n}} - \sqrt{n^2+2\sqrt{n}}\right)$$

2) Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^3+n} + e^n + n!}{6\sqrt{n^3} + e^{4n}}$$

3) Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{3+2x_n}$$

1. zápočtová písemka - nmma 101 - ZS - 2016
var. B

1) Spočtěte

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^3+n} + e^n + n!}{6n^{3/2} + e^{4n} + \pi n!}$$

2) Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n^2-\sqrt{n}} - \sqrt{n^2+2\sqrt{n}}\right)$$

3) Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti:

$$x_1 = 0; \quad x_{n+1} = \sqrt{5x_n+6}$$

1. zápočtová písemka – NMMA101 – ZS – 2016 – var. A

Řešení:

1) Upravíme $\underbrace{\sqrt{n}\left(\sqrt{n^2-\sqrt{n}}-\sqrt{n^2+2\sqrt{n}}\right)}_{a_n:=} = \dfrac{-3\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n^2-\sqrt{n}}+\sqrt{n^2+2\sqrt{n}}} =$

$$= \frac{n}{n}\cdot\frac{-3}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{n}}{n^2}}+\sqrt{1+2\frac{\sqrt{n}}{n^2}}}.$$

Protože $\sqrt{1-\frac{\sqrt{n}}{n^2}} \to 1$ a $\sqrt{1+2\frac{\sqrt{n}}{n^2}} \to 1$ pro $n\to+\infty$ podle aritmetiky limit a vlastností odmocniny, je opět s využitím aritmetiky limit

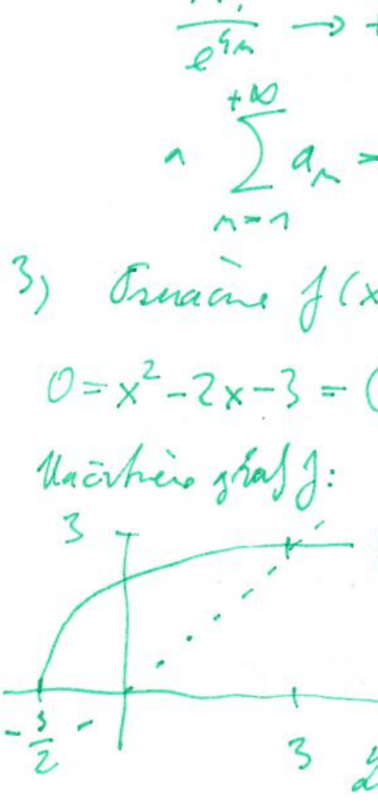
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\frac{3}{2}$$

2) Upravíme $a_n := \dfrac{\sqrt{n^3+n}+e^n+n!}{6\sqrt{n^3}+e^{4n}} = \dfrac{n!}{e^{4n}}\,\dfrac{\frac{\sqrt{n^3+n}}{n!}+\frac{e^n}{n!}+1}{\frac{6\sqrt{n^3}}{e^{4n}}+1}$

Protože podle růstové škály platí $\frac{\sqrt{n^3+n}}{n!}, \frac{e^n}{n!}, \frac{\sqrt{n^3}}{e^{4n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ a $\frac{n!}{e^{4n}} \to +\infty$ je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Tedy řada $\sum a_n$ diverguje a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$.

3) Označme $f(x) \overset{(*)}{=} \sqrt{3+2x}$. Pak řešme $x = f(x)$, $x = \sqrt{3+2x} \Rightarrow$ $0 = x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)$, $x=3$ je hledané řešení, $x=-1$ nevyhovuje zk.

Načrtneme graf f: Platí $\forall x\in(0,3]: f(x)\in(0,3]$ a $f(x)\geq x$.



(Ověříme vyjádření: $x\in(0,3] \Rightarrow 0 \leq \sqrt{3+2x} \leq \sqrt{9} = 3$, a $f^2(x) - x^2 = 3+2x-x^2 = -(x-3)(x+1) \geq 0$.)

Tedy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je rostoucí, $\subset (0,3] \Rightarrow$ ex. $\lim x_n = \tilde{x}$. Limitním přechodem v $(*)$ získáme $\tilde{x} = \sqrt{3+2\tilde{x}}$, tj. $\tilde{x} = 3$.

1. zápočtová písemka – mmma 101 – ZS – 2016 – var. B

1) Upravíme: $\frac{\sqrt{n^3+n}+e^n+n!}{6n^{3/2}+e^{5n}+\pi n!} = \frac{\frac{\sqrt{n^3+n}}{n!}+\frac{e^n}{n!}+1}{\frac{6n^{3/2}}{n!}+\frac{e^{5n}}{n!}+\pi} =: a_n.$

Protože $\frac{n^{3/2}}{n!}, \frac{e^{5n}}{n!}, \frac{e^n}{n!} \to 0$ pro $n\to+\infty$ a $\sqrt{n^3}\le\sqrt{n^3+n}\le\sqrt{2}\cdot\sqrt{n^3}$,

je dle aritmetiky limit $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\cancel{\infty} = \frac{1}{\pi}$

2) Upravíme: $-\left(\sqrt{n^2-\sqrt{n}}-\sqrt{n^2+2\sqrt{n}}\right) = \frac{+3\sqrt{n}}{\sqrt{n^2-\sqrt{n}}+\sqrt{n^2+2\sqrt{n}}} =: a_n(-1)$

$= \frac{3}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{n}}{n^2}}+\sqrt{1+2\frac{\sqrt{n}}{n^2}}}$. Protože $\sqrt{1-\frac{\sqrt{n}}{n^2}}, \sqrt{1+\frac{2\sqrt{n}}{n^2}}\to 1$ pro $n\to+\infty$

z vlastností $\sqrt{\ }$ a aritmetiky limit plyne, že

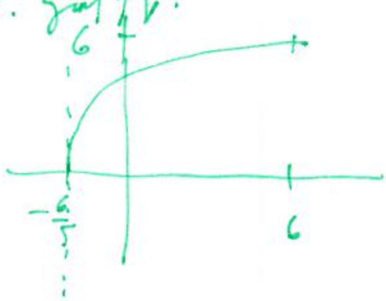
$\lim_{n\to+\infty}\frac{-a_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{3}{2}$. Protože $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje, diverguje

podle limitního srovnávacího kritéria řada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-a_n)$ a tedy i

řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ (a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\infty$)

3) Označme $f(x) = \sqrt{5x+6}$ a řešme $x=f(x)$, $x^2=5x+6$, $x^2-5x-6=0$

$(x-6)(x+1)=0$ tj. $x=6$, $x=-1$ nevyhovuje. Graf f:



Je $f([0,6])\subset[0,6]$, protože pro $x\in[0,6]$ platí

$0\le f(x)=\sqrt{5x+6}\le\sqrt{36}=6$.

Dále $f(x)^2-x^2=5x+6-x^2=-(x-6)(x+1)\ge 0$ pro $x\in[0,6]$.

Tedy pro $x\in[0,6]$ platí $f(x)\ge x$.

Posloupnost $\{x_n\}$ je rostoucí $\subset[0,6]$, tedy ex. $\lim_{n\to+\infty} x_n=\tilde{x}$. Limitním přechodem v (*) $x_{n+1}=f(x_n)$ dostaneme: $\tilde{x}=f(\tilde{x})$, tedy $\tilde{x}=6$.