1. Spočtěte:
$$\int_0^{2\pi} \frac{a+\sin(x)}{(b+\cos(x))^2}\mathrm{d}x,$$
je-li $a, b \in \mathbb{R}$ and $b > 1$. Určete, jakou funkci budete integrovat přes jakou křivku. Spočtěte rezidua a vyjádřete integrál.

2. Rozviňte do Fourierovy řady funkci f víte-li, že je lichá, 2π periodická,
$$f(x) = \cos(x)$$
pro $x \in (0, \pi)$ a její Fourierova řada k ní konverguje v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. Napište, čemu se f rovná pro všechny $x \in [-\pi, \pi]$. Najděte maximální intervaly, na kterých Fourierova řada konverguje stejnoměrně.

3. Definujeme funkci
$$F(z) = \frac{z}{(e^z-1)^2}.$$
Najděte první tři nenulové členy Laurentovy řady v bodě 0. Určete všechny izolované singularity F a jejich typ.

Ilustrační písemka - NMAF062 - v3

1) $$\int_0^{2\pi} \frac{a+\sin x}{(b+\cos x)^2}\,dx = I$$

Integrujeme při $$F(z) = \frac{a+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}{\left(b+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)^2}\cdot\frac{1}{iz} =$$

$$= \frac{\frac{2aiz+z^2-1}{2i\cancel{z}}}{\left(\frac{2bz+z^2+1}{2\cancel{z}}\right)^2\cdot\cancel{iz}} = -\frac{4}{2}\,\frac{z^2+2aiz-1}{(z^2+2bz+1)^2}$$

přes $\varphi(t) = e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. Pak $I = \int_\varphi F(z)\,dz$

pokud kořeny $z^2+2bz+1$ neleží na $\partial U_1(0)$.

izolované singularity: $z^2+2bz+1 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = \frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4}}{2}$

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= -b-\sqrt{b^2-1} \notin \operatorname{int}\varphi\cup\langle\varphi\rangle \\ z_2 &= -b+\sqrt{b^2-1} \in \operatorname{int}\varphi \end{aligned}\right\}\text{ protože } b>1.$$

spočteme: $$z_2^2+2aiz_2-1 = b^2-2b\sqrt{b^2-1}+b^2-1+$$
$$2ai\left(-b+\sqrt{b^2-1}\right)-1 = \underbrace{2b^2-2-2b\sqrt{b^2-1}}_{=2\sqrt{b^2-1}\left(\sqrt{b^2-1}-b\right)\neq 0}+2ai\left(-b+\sqrt{b^2-1}\right)$$
pro $b>1$.

Tedy z_2 je 2násobný pól a $I = 2\pi i\,\operatorname{res}_{z_2}F$

spočteme $$\operatorname{res}_{z_2}F(z) = \lim_{z\to z_2} -\frac{4}{2}\left[\frac{z^2+2aiz-1}{(z-z_1)^2}\right]' =$$

$$= -\frac{4}{2}\,\frac{(2z_2+2ai)(z_2-z_1)^2-\underbrace{(z_2^2+2aiz_2-1)2\cdot(z_2-z_1)}_{\text{má být } 0}}{(z_2-z_1)^4} =$$

$$= -\frac{4}{2}\,\frac{1}{2^4(b^2-1)^2}\Big[2z_2(z_2-z_1)^2-(z_2^2-1)2\cdot(z_2-z_1)+i\big(2a(z_2-z_1)^2$$
$$-2az_2\cdot 2\cdot(z_2-z_1)\big)\Big]$$

$$2(z_2 - z_1)\left(2 z_2 (z_2 - z_1) - 2(z_2^2 - 1)\right) = 2(z_2 - z_1)(-2 z_2 z_1 + 2)$$

$$= 2(z_2 - z_1)\left(2 - 2\cdot\left(b^2 - (b^2-1)\right)\right) = 0 \quad \text{ok.}$$

$\Rightarrow$

$$\operatorname{res}_{z_2} F(z) = -\frac{1}{}\,\frac{1\cdot i\cdot 2a}{16(b^2-1)^2}(z_2 - z_1)(z_2 - z_1 - 2z_2) =$$

$$= \frac{4\cdot i\, a}{16(b^2-1)^2}(z_2 - z_1)(+1)(z_2 + z_1) =$$

$$= \frac{+i\,a\cdot 4}{16(b^2-1)^2}(z_2^2 - z_1^2) = \frac{-4iab\cdot 4}{16(b^2-1)^{3/2}}$$

$$z_1^2 - z_1^2 = \cancel{b^2} + \cancel{(b^2-1)} - 2b\sqrt{b^2+1} - \left(\cancel{b^2} + \cancel{(b^2-1)} + 2b\sqrt{b^2-1}\right)$$

$$= -4b\sqrt{b^2-1}$$

$$\mathrm{Im}\; I = +\frac{\pi a b\cdot 2}{(b^2-1)^{3/2}}.$$

2) $f(x) = \cos x \qquad x \in (0,\pi)$

$f(x) = -\cos x \qquad x \in (-\pi, 0)$ } **2** (f je lichá)

$f(0) = 0$

$f(\pi) = f(-\pi) = 0$ } aby šla konv. její F. řady dle Jordan-Dirichletova kritéria 2

f je po částech C^1 a v nich platí: $f(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

f lichá $\Rightarrow$ počítám členy b_k

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x(k+1)) + \sin(x(k-1))\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\cos(x(k+1))}{k+1}\right]_0^{\pi} + \left[-\frac{\cos(x(k-1))}{k-1}\right]_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k+1}\left(1-\cos\pi(k+1)\right) + \frac{1}{k-1}\left(1-\cos(\pi(k-1))\right)\right), \; k \neq 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a \\ \Rightarrow\ &\sin a \cos b = \tfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \end{aligned}}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{+2k}{k^2-1} + \frac{1}{\pi}\cos(k\pi+\pi)\cdot(-1)\cdot\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{2k}{k^2-1}\left(1+\cos k\pi\right) = \frac{2k}{\pi(k^2-1)}\left(1+(-1)^k\right) \quad 3$$

$k \neq 1$

$k = 1 \Rightarrow b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x \sin x\,dx =$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{2}(1-1) = 0 \qquad \textbf{2}$$

Poznámky:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k^2-1}\left(1+(-1)^k\right)\sin kx \ ; \ \forall x\in\mathbb{R}. \qquad 1$$

Stejnoměrná konv. na intervalech $(\delta, \pi-\delta)$ pro $\delta\in(0,\frac{\pi}{2})$.

$+2k\pi \qquad k\in\mathbb{Z} \qquad 2$

Případně napsáno - li: $k=2l$; $l\in\mathbb{N}$:

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{l}{4l^2-1}\sin 2lx \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

3) $e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + o(|z|^5)$ známá řada

$$(e^z-1)^2 = z^2 + z^3 + z^4\left(\frac{1}{4} + 2\frac{1}{6}\right) + z^5\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\right) + o(|z|^5) \qquad (+)$$

$$= z^2 + z^3 + \frac{7}{12}z^4 + o(|z|^4) \qquad 2$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$$

Dělení polynomů:

$$z : (e^z-1)^2 = z : \quad z^2 + z^3 + \frac{7}{12}z^4 + o(|z|^4) = \frac{1}{z} - 1 + \frac{5}{12}z + \dots$$

$$-\left(z + z^2 + \frac{7}{12}z^3\right) \qquad\qquad 2$$

$$-z^2 - \frac{7}{12}z^3$$

$$-\left(-z^2 - z^3\right)$$

$$z^3\left(1 - \frac{7}{12}\right)$$

Laurentova řada $\frac{z}{(e^z-1)^2}$ začíná: $\frac{1}{z} - 1 + \frac{5}{12}z + \dots \qquad 1 \quad (*)$

Pólové sing F: $e^z - 1 = 0 \iff e^z = 1 \iff z_k = 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ 3

z_0 je pól násobnosti 1, viz výše $(*)$

z_k, $k \neq 0$ je pól násobnosti 2, viz $(+)$. $\quad$ 4