1. zkoušková písemka, NMAF062, LS 2011

1. Rozviňte do Fourierovy řady funkci f víte-li, že je sudá, 2π periodická,

$$f(x) = 1 - x$$

pro $x \in (0, \pi)$ a její Fourierova řada k ní konverguje v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. Napište, čemu se f rovná pro všechny $x \in [-\pi, \pi]$. Najděte maximální intervaly, na kterých Fourierova řada konverguje stejnoměrně.

2. Pro která $a \in \mathbb{R}$ je $f(x, y) = ax^3 - 3xy^2 + 2x$ reálnou částí nějaké holomorfní funkce? Najděte tuto holomorfní funkci a vyjádřete ji pomocí z.

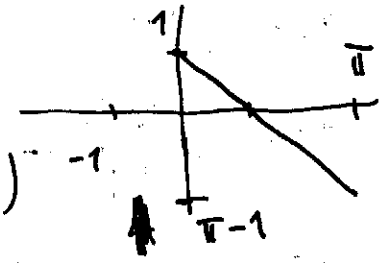
3. Spočtěte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}(e^x + 1)}{2e^x + e^{-x}}.$$

Určete, jakou funkci budete integrovat přes jakou křivku. Spočtěte rezidua a vyjádřete integrál.

Vzorová písemka nmaf 062 – 2011 – verze 1

1) $f(x) = 1 - x \quad x \in (0,\pi)$



$= 1 + x \quad x \in (-\pi, 0)$ (je sudá) 1

– dále 2π per.

$= 1 \quad$ v $x = 0$ (je zde spojitá)

$= 1 - \pi \quad$ v π (je zde spojitá) 2

⇒ f je spojitá na $\mathbb{R}$, po částech C^1 a tedy k ní její F. řada konv. stejnoměrně na $\mathbb{R}$. 2

• f sudá ⇒ pouze členy s cos

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 1 - x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left(\pi - \frac{\pi^2}{2}\right) = 2 - \pi$$ 2

$$\underset{k\in\mathbb{N}}{a_k =} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1-x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[(1-x)\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\sin kx}{k}\,dx\right) =$$

$\downarrow d \quad \downarrow i$

$-1 \quad \frac{\sin kx}{k}$

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{k}\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_0^\pi\right) = \frac{2}{\pi k^2}\left(1 - (-1)^k\right)$$ 3

$$FR := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi k^2}\left(1 - (-1)^k\right)\cos kx + 1 - \frac{\pi}{2}$$ 2

2) $f(x,y) = ax^3 - 3xy^2 + 2x$

CR podm.: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ 2

$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 3ax^2 - 3y^2 + 2$

$\Rightarrow g(x,y) = 3ax^2y - y^3 + 2y + c(x)$ 2

K určení $c(x)$ využijeme 2. CR podm.: $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$

$\frac{\partial g}{\partial x} = 6axy + c'(x) \overset{?}{=} -(-6xy) = 6xy = -\frac{\partial f}{\partial y}$ 2

Tedy $a = 1$ a $c'(x) = 0$.

$\Rightarrow g(x,y) = 3x^2y - y^3 + 2y + c$ 2

Hledaná fce je: $f(x,y) + i g(x,y) = \cancel{a}x^3 - 3xy^2 + 2x + i3x^2y$

$- iy^3 + i2y + ci = 2(x+iy) + (x^3 + 3x^2iy + 3x(iy)^2 +$

$+ Ci \qquad + (iy)^3) =$

$2(x+iy) + (x+iy)^3 + Ci$ 2

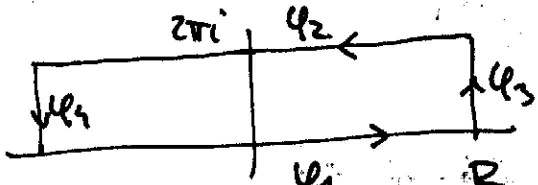
Označme-li $z = x+iy$:

$F(z) = 2(z) + z^3 + Ci$ pro lib. $c \in \mathbb{R}$. 2

3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x/\sqrt{2}}(e^x+1)}{2e^x+e^{-x}}\,dx = I$$

Budeme integrovat $F(z) = \dfrac{e^{-z/\sqrt{2}}(e^z+1)}{2e^{2z}+1}\cdot e^z$ přes 3

Křivka. φ :



3

$$\left|\int_{\varphi_3} F(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{2\pi} F(R+ti)\cdot i\,dt\right| \le \int_0^{2\pi} \frac{e^{-R/\sqrt{2}+R}(e^R+1)}{2e^{2R}-1}\,dt \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

$\varphi_3(t) = R+it;\ t\in[0,2\pi]$

Podobně $\int_{\varphi_4} F(z)\,dz \longrightarrow 0$ 2

$\int_{\varphi_1} F(z)\,dz \xrightarrow{R\to+\infty} I$, protože $F\in L^1(\mathbb{R})$ stejně

$$\int_{\varphi_2} F(z)\,dz = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{2\pi i}{\sqrt{2}}}(e^t+1)}{2e^t+e^{-t}}\,dt \xrightarrow{R\to+\infty} -e^{-\frac{2\pi i}{\sqrt{2}}}\, I$$ 2

využili jsme $2\pi i$ periodicity exp.

$-\varphi_2(t) = t+2\pi i;\ t\in[-R,R]$

• izolované singularity F v pásu $\{\operatorname{Im} z \in (0,2\pi)\}$.

$$2e^{2z} = -1 \iff e^{2z} = -\frac{1}{2} \iff 2z = \lg\frac{1}{2} + i\pi + il2\pi,\quad l\in\mathbb{Z}$$

$$\iff z = \frac{1}{2}\lg\frac{1}{2} + i\left(\frac{\pi}{2}+l\pi\right)$$

V pásu $\{\operatorname{Im} z \in (0,2\pi)\}$ leží

$z_1 = \frac{1}{2}\lg\frac{1}{2} + i\frac{\pi}{2}$; $z_2 = \frac{1}{2}\lg\frac{1}{2} + i\frac{3\pi}{2}$ 2

Pzn: $e^{z_1} = i\sqrt{\frac{1}{2}}$; $e^{z_2} = -i\sqrt{\frac{1}{2}}$

• $I\left(1-e^{-\frac{2\pi i}{\sqrt{2}}}\right) = 2\pi i\left(\operatorname{res}_{z_1}F(z) + \operatorname{res}_{z_2}F(z)\right)$

• residua:

$$\operatorname{res}_{z_1}F(z) = \frac{e^{-z_1/\sqrt{2}}\left(e^{z_1}+1\right)e^{z_1}}{4e^{2z_1}} = \left(-\frac{1}{2}\right) i\sqrt{\frac{1}{2}}\left(i\sqrt{\frac{1}{2}}+1\right)\cdot e^{-z_1/\sqrt{2}}$$

v z_1 je pól nás. 1

$$e^{-z_1/\sqrt{2}} = e^{-\frac{1}{2\sqrt{2}}\lg\frac{1}{2} - i\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{res}_{z_1}F = e^{-\frac{1}{2\sqrt{2}}\lg\frac{1}{2}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{4} - i\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$\operatorname{res}_{z_2}F(z) = e^{-\frac{1}{2\sqrt{2}}\lg\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{3\pi i}{2\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{4} + i\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \qquad 2$$

$$\Rightarrow I = \frac{2\pi i\, e^{-\frac{1}{2\sqrt{2}}\lg\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}}\left(e^{\frac{\pi i}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}}\right)}\left(\frac{1}{4}\left(e^{-\frac{\pi i}{2\sqrt{2}}} + e^{-\frac{3\pi i}{2\sqrt{2}}}\right) - \frac{i}{2\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{\pi i}{2\sqrt{2}}} - e^{-\frac{3\pi i}{2\sqrt{2}}}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi\, e^{-\frac{1}{2\sqrt{2}}\lg\frac{1}{2}}}{\sin\frac{\pi}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) \qquad 2$$