17. Variační počet.

Terminologická poznámka. Zobrazení $F : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá funkce. Zobrazení $\Phi : \mathcal{M} \subset X \to \mathbb{R}$, kde X je nějaký obecnější (často nekonečně-dimenzionální prostor) se nazývá *funkcionál*.

Opakování. X se nazve normovaný prostor, jestliže X je vektorový prostor (nad $\mathbb{R}$), a každému $x \in X$ je přiřazena norma $\|x\|$ tak, že platí: (i) $\|x\| = 0$ právě když $x = 0$, (ii) $\|ax\| = |a|\|x\|$, (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; pro každé x, $y \in X$, $a \in \mathbb{R}$. Definujeme okolí

$$U(x_0, \delta) = \big\{x \in X;\ \|x - x_0\| < \delta\big\}$$
$$P(x_0, \delta) = U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$$

Funkcionál $\Phi(x) : \mathcal{M} \subset X \to \mathbb{R}$ je spojitý, pokud

$$\big(\forall x_0 \in \mathcal{M}\big)\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\Big[x \in U(x_0, \delta) \cap \mathcal{M} \implies |\Phi(x) - \Phi(x_0)| < \varepsilon\Big]$$

Definice. Nechť $\Phi(x) : \mathcal{M} \subset X \to R$, kde X je normovaný prostor.

1. Nechť x_0, $h \in X$. Limita (pokud existuje)

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\Phi(x_0 + th) - \Phi(x_0)\right]$$

   se nazývá Gâteauxův diferenciál Φ v bodě x_0 ve směru h. Značí se $D\Phi(x_0; h)$.

   Ekvivalentně je $D\Phi(x_0; h) = \varphi'(0)$, kde $\varphi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována $\varphi(t) = \Phi(x_0 + th)$.

2. Nechť $x_0 \in X$. Existuje-li spojité lineární zobrazení $A : X \to R$, splňující

$$\Phi(x_0 + h) = \Phi(x_0) + A(h) + o(\|h\|), \qquad h \to 0,$$

   podrobněji

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\Big[h \in P(0, \delta) \implies \frac{|\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) - A(h)|}{\|h\|} < \varepsilon\Big],$$

   nazývá se Fréchetův diferenciál Φ v bodě x_0. Značí se $\Phi'(x_0)$.

Poznámky. • pro $X = \mathbb{R}^n$ je Gâteauxův diferenciál totéž co derivace ve směru; Fréchetův diferenciál totéž co totální diferenciál. • platí: $\Phi'(x_0)$ existuje $\implies$ $D\Phi(x_0; h)$ existuje pro každé $h \in X$, a platí $D\Phi(x_0; h) = [\Phi'(x_0)](h)$. • platí: $\Phi'(x_0)$ existuje $\implies$ Φ je spojitý v bodě x_0. • <u>důležité:</u> k existenci $\Phi'(x_0)$ je nutné, aby množina $\mathcal{M}$ (=definiční obor Φ) obsahovala nějaké okolí x_0 – dosti silný předpoklad. Existence $D\Phi(x_0; h)$ předpokládá pouze, že $x_0 + th \in \mathcal{M}$ pro t dosti malé.

Definice. Nechť $\Phi(x) : \mathcal{M} \subset X \to \mathbb{R}$. Bod $x_0 \in \mathcal{M}$ se nazve:

1. globální minimum, jestliže $(\forall x \in \mathcal{M})\big[\Phi(x) \geq \Phi(x_0)\big]$;

2. lokální minimum, jestliže $(\exists \delta > 0)(\forall x \in U(x_0, \delta) \cap \mathcal{M})\big[\Phi(x) \geq \Phi(x_0)\big]$;

3. ostré lokální minimum, jestliže $(\exists \delta > 0)(\forall x \in P(x_0, \delta) \cap \mathcal{M})\big[\Phi(x) > \Phi(x_0)\big]$.

Analogicky se definuje maximum. Souhrnný název pro minimum/maximum je ,,extrém".

Věta 17.1. Nechť $\Phi(x) : \mathcal{M} \subset X \to R$ má v $x_0 \in \mathcal{M}$ lokální extrém. Nechť $h \in X$ je takové, že $D\Phi(x_0; h)$ existuje. Potom $D\Phi(x_0; h) = 0$.
Definice. Nechť $k \geq 0$ celé, $a < b \in \mathbb{R}$. Definujeme

$$\begin{aligned} C^k([a,b]) &= \big\{\tilde{y}|_{[a,b]} : \ \tilde{y} \in C^k(\mathbb{R})\big\} \ ; \\ C_0^1([a,b]) &= \big\{y \in C^1([a,b]) : \ y(a) = y(b) = 0\big\} \ . \end{aligned}$$

Základní úloha variačního počtu. Nalezení extrémů funkcionálu $\Phi(y) : \mathcal{M} \subset X \to \mathbb{R}$, kde $X = C^1([a,b])$,

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \\ \mathcal{M} &= \big\{y \in C^1([a,b]) : \ y(a) = A, \ y(b) = B\big\} \ . \end{aligned} \qquad (U)$$

Prostor $C^1([a,b])$ je opatřený normou $\|y\| = \sup_{x\in[a,b]} \big\{|y(x)| + |y'(x)|\big\}$.
Klíčovou roli nadále hraje funkce $f = f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která funkcionál "vytváří". Budeme značit $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$.

Věta 17.2. Je dána úloha (U). Nechť $y_0 \in \mathcal{M}$, $h \in C_0^1([a,b])$ jsou libovolná. Předpokládejme, že $f \in C^1$. Potom existuje $D\Phi(y_0; h)$ a platí

$$D\Phi(y_0; h) = \int_a^b f_y(x, y_0(x), y_0'(x))h(x) + f_z((x, y_0(x), y_0'(x))h'(x)\, dx \, .$$

Upřesňující poznámka. V předchozí větě stačí, aby $f = f(x, y, z) \in C^1(G)$, kde $G \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina taková, že $(x, y_0(x), y_0'(x)) \in G$ pro každé $x \in [a,b]$.

Diracova funkce $\delta(x)$. Je určena vlastnostmi ① $\delta(x) = 0$ pro $\forall x \neq 0$ a ② $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)\, dx = 1$ pro $\forall \varepsilon > 0$. Interpretujeme-li pojmy ,,funkce" a ,,integrál" v obvyklém smyslu, pak Diracova funkce nemůže existovat!

Definice. Nosič (support) funkce f definujeme jako

$$\operatorname{supp} f := \overline{\big\{x \in \mathbb{R}; \ f(x) \neq 0\big\}}.$$

Ekvivalentně: nosič je nejmenší uzavřená množina M taková, že $f = 0$ mimo M.

Lemma 17.1. Nechť $\varphi(x)$ je omezená funkce s omezeným nosičem, a nechť $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$. Nechť $f(x)$ je spojitá v bodě x_0. Potom

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}} f(x_0 + y)\varphi_\varepsilon(y)\, dy = f(x_0),$$

kde $\varphi_\varepsilon(y) := \varepsilon^{-1}\varphi(y/\varepsilon)$.

Poznámka. Je-li φ nula vně intervalu $[-K, K]$, stačí v tvrzení předchozí věty integrovat přes $[-\varepsilon K, \varepsilon K]$.

Důsledek. Nechť $v(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě x_0. Potom

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{x_0+\varepsilon}^{x_0-\varepsilon} v(x)\, dx = v(x_0)\,.$$

Poznámka. Posloupnost funkcí φ_ε aproximuje Diracovu funkci δ – podobně jako posloupnost čísel, jdoucích do 0, aproximuje ,,nekonečně malé" číslo: další klíčový objekt analýzy, který striktně vzato neexistuje.

Důležitá konstrukce. Shlazovací funkce (molifiér, bump function, seřezávací funkce) se definuje jako

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ C \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & |x| < 1 \end{cases}$$

Základní vlastnosti φ:

- $\varphi(x) \geq 0$ v $\mathbb{R}$
- $\varphi(x) = 0$ pro $|x| \geq 1$, $\varphi(x) > 0$ pro $|x| < 1$
- $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$
- $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = 1$ (docílíme vhodnou volbou konstanty $C > 0$)

Seřezávací funkce s nosičem v $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ se dostane jako

$$\varphi_{a,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right)\,.$$

Lemma 17.2. [Slabá formulace diferenciální rovnice.]

1. Nechť $u \in C([a, b])$. Potom $u \equiv 0$ v $[a, b]$, právě když

$$\int\limits_a^b u(x)h(x)\, dx = 0 \qquad \forall h \in C_0^1([a, b])\,.$$

2. Nechť $w \in C^1([a,b])$, $v \in C([a,b])$. Potom $-w' + v \equiv 0$ v $[a,b]$, právě když

$$\int_a^b w(x)h'(x) + v(x)h(x)\,dx = 0 \qquad \forall h \in C_0^1([a,b])\,.$$

Věta 17.3. [Euler-Lagrange.] Je dána úloha (U). Nechť $y \in \mathcal{M}$ je lokální extrém. Předpokládejme navíc, že $y \in C^2$, $f \in C^2$. Potom y splňuje v $[a,b]$ rovnici

$$-\frac{d}{dx}\big(f_z(x, y(x), y'(x))\big) + f_y(x, y(x), y'(x)) = 0\,. \qquad (E.L.)$$

Definice. Předchozí rovnice se nazývá Euler-Lagrangeova rovnice funkcionálu Φ. Každé její řešení, náležící do $\mathcal{M}$ (tj. splňující okrajové podmínky $y(a) = A$, $y(b) = B$), nazýváme extremálou úlohy (U).

Příklad. $\Phi(y) = \int_0^\pi (y' + y)^2 + 2y \sin x\,dx$, $\mathcal{M} = \big\{y \in C^1([0,\pi]);\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 1\big\}$. E.L. rovnice je $y'' - y = \sin x$, jediná extremála $y_0(x) = \frac{\sinh x}{\sinh \pi} - \frac{1}{2}\sin x$. Elementárně lze dokázat, že y_0 je globální minimum.

Věta 17.4. [Legendre.] Je dána úloha (U). Nechť $y \in \mathcal{M}$ je C^2, $f \in C^2$. Potom

1. je-li y lokální minimum, je $f_{zz}(x, y(x), y'(x)) \geq 0$ pro $\forall x \in (a,b)$;
2. je-li y lokální maximum, je $f_{zz}(x, y(x), y'(x)) \leq 0$ pro $\forall x \in (a,b)$.

Poznámka. Souvisí s tvrzením: má-li $\varphi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v bodě $t = 0$ lokální minimum, je $\varphi''(0) \geq 0$. V průběhu důkazu se odvodí druhý Gâteauxův diferenciál

$$D^2\Phi(y; h, h) = \int_a^b f_{yy}(x, y, y')h^2 + 2f_{yz}(x, y, y')hh' + f_{zz}(x, y, y')[h']^2\,dx\,.$$

Lemma 17.3. Nechť f nezávisí explicitně na x, tj. $f = f(y, z)$. Potom každé řešení E.L. rovnice řeší také rovnici

$$-y' f_z(y, y') + f(y, y') = K\,,$$

kde K je vhodná konstanta.

Definice. Nechť $y \in \mathcal{M}$ je extremála úlohy (U). Označme

$$\begin{aligned} P(x) &= f_{zz}(x, y(x), y'(x)) \\ Q(x) &= f_{yy}(x, y(x), y'(x)) - [f_{yz}(x, y(x), y'(x))]' \end{aligned}$$

Rovnice

$$[P(x)u'(x)]' - Q(x)u(x) = 0 \qquad (J)$$

(pro neznámou funkci $u = u(x)$) se nazývá Jacobiho rovnice, příslušná dané extremále.

Bod $\tilde{x} \in (a, b]$ se nazve konjugovaný bod rovnice (J), pokud existuje netriviální (tj. ne identicky nulové) řešení $u(x)$ takové, že $u(a) = u(\tilde{x}) = 0$.

Věta 17.5.[1] [Jacobiho.] Nechť $y \in C^2([a, b])$ je extremálou úlohy (U), nechť $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$. Nechť (J) je příslušná Jacobiho rovnice, přičemž $P(x) > 0$ v $[a, b]$.

1. Je-li y lokální minimum, pak rovnice (J) nemá v intervalu (a, b) konjugovaný bod.
2. Jestliže rovnice (J) nemá v intervalu $(a, b]$ konjugovaný bod, je y ostré lokální minimum.

Zrcadlová verze: $P(x) < 0$ v $[a, b]$, maximum místo minimum.

Variační úloha s vazbou. Hledáme extrémy funkcionálu Φ na množině $\mathcal{M}$, kde

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \\ \mathcal{M} &= \big\{ y \in C_0^1([a, b]) : \Psi(y) = c \big\} \qquad (V) \\ \Psi(y) &= \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\, dx\,. \end{aligned}$$

Věta 17.6.[2] [Lagrangeův multiplikátor.] Nechť $y \in \mathcal{M}$ je lokální extrém úlohy (V). Předpokládejme, že $y \in C^2$, $f, g \in C^2$, navíc $D\Psi(y; h) \neq 0$ alespoň pro jedno $h \in C_0^1([a, b])$. Potom existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že

$$D\Phi(y; h) - \lambda D\Psi(y; h) = 0 \qquad \forall h \in C_0^1([a, b]) \qquad (L)$$

Použití na úlohu (V). (L) tvrdí nulovost Gâteauxova diferenciálu pro funkcionál

$$\chi(y) = \int_a^b f(x, y, y') - \lambda g(x, y, y')\, dx\,,$$

tedy extrémy (V) řeší odpovídající E.L. rovnici

$$-\frac{d}{dx}\big(f_z(x, y, y') - \lambda g_z(x, y, y')\big) + f_y(x, y, y') - \lambda g_y(x, y, y') = 0$$

Poznámka. Srovnej s větou v $\mathbb{R}^n$: nechť x je lokální extrém $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na množině $M = \{x \in \mathbb{R}^n;\ G(x) = c\}$. Nechť vektor $\nabla G(x)$ je nenulový. Potom existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že $\nabla\big(F(x) - \lambda G(x)\big) = \mathbf{0}$.

[1] Bez důkazu.
[2] Bez důkazu.

18. Stejnoměrná konvergence.

Definice. Řekneme, že funkce $f_n : I \to \mathbb{R}$ konvergují v I bodově k funkci f, jestliže pro $\forall x \in I$ platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,.$$

Značíme $f_n \to f$ v I.

Příklady. ① $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$. Potom $f_n \to \exp$ v $\mathbb{R}$.
② $f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|}$. Potom $f_n \to \operatorname{sgn}$ v $\mathbb{R}$.
③ $f_n(x) = n^2 x \exp(-nx) \to 0$ v $[0, \infty)$.

Poznámka. Příklady demonstrují některé nedostatky bodové konvergence.
Pokud $f_n \to f$ v $I \subset \mathbb{R}$, a $f_n(x)$ jsou spojité, pak f nemusí být spojitá na I(příklad 2).
Pokud $f_n \to f$ v $[a, b]$, nemusí být $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$ (příklad 3 pro $[a, b] = [0, 1]$).
To nás motivuje k zavedení lepšího, silnějšího pojmu konvergence funkcí.

Definice. Řekneme, že funkce $f_n : I \to \mathbb{R}$ konvergují v I stejnoměrně k funkci f, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall x \in I)(\forall n \geq n_0)\Big[|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big]\,. \tag{1}$$

Značíme $f_n \rightrightarrows f$ v I.

Poznámka. $f_n \to f$ bodově v I, právě když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in I)(\exists n_0 \in N)(\forall n \geq n_0)\Big[|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big]\,. \tag{2}$$

Rozdíl je pouze v pořadí kvantifikace x a n_0. Při bodové konvergenci nejprve fixuji x, pak volím n_0, tj. n_0 může obecně záviset na x.
Při stejnoměrné konvergenci najdu jedno n_0, které pak funguje pro všechna $x \in I$.

Poznámka. $K = \sup_{x\in I} g(x)$ znamená 1. $g(x) \leq K$ pro $\forall x \in I$ a 2. $\forall K' < K\ \exists x \in I$ tak, že $g(x) > K'$. Souhrnně: K je nejmenší horní odhad pro $g(x)$ na I.

Lemma 18.1. Nechť f_n jsou definovány v I. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:
(1) $f_n \rightrightarrows f$ v I
(2) $\sigma_n \to 0$ pro $n \to \infty$, kde $\sigma_n := \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$
(3) pro libovolnou posloupnost $\{x_n\} \subset I$ platí: $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$ pro $n \to \infty$

Poznámka. Často užívané úvahy:
1. Jestliže existují a_n (čísla nezávislá na x) taková, že $a_n \to 0$ a platí $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ pro $\forall x \in I$, tak potom $f_n \rightrightarrows f$ v I.
2. Jestliže existují $x_n \in I$ taková, že $|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\to 0$, pak $f_n \not\rightrightarrows f$ v I.

. . . . . *17.10.2014*

Věta 18.1. Nechť $f_n(x)$ jsou spojité v I, nechť $f_n \rightrightarrows f$ v I. Potom f je spojitá v I.

Věta 18.2. Nechť f_n jsou spojité v omezeném intervalu $[a, b]$, nechť $f_n \rightrightarrows f$ v $[a, b]$. Potom $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$ pro $n \to \infty$.

Příklad. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Potom $f_n \to 0$ pro každé $x \in [0,\infty)$; $f_n \not\rightrightarrows 0$ v $[0,\infty)$; pro $\forall \eta > 0$ pevné $f_n \rightrightarrows 0$ v $[\eta,\infty)$; pro žádné $\delta > 0$ není $f_n \rightrightarrows 0$ v $[0,\delta)$.

Věta 18.3. Buď $\delta > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \times [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \mathbb{R}$, $f, \partial_2 f \in C([a,b] \times (t_0 - \delta, t_0+\delta))$. Pak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x \bigg|_{t=t_0} = \int_a^b (\partial_2 f)(x,t_0)\,\mathrm{d}x.$$

Definice. Řekneme, že funkce f_n konvergují k f lokálně stejnoměrně v I, jestliže

$$(\forall x_0 \in I)(\exists \delta > 0)\big[f_n \rightrightarrows f \text{ v } I \cap U(x_0,\delta)\big].$$

Značíme $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ v I.

Příklad. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Potom $f_n \not\rightrightarrows 0$ v $(0,\infty)$, avšak $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0$ v $(0,\infty)$.

Poznámky. Zjevně platí: stejnoměrná konvergence se přenáší na menší množinu, tj. $f_n \rightrightarrows f$ v I, $J \subset I \implies f_n \rightrightarrows f$ v J.
Dále: stejnoměrná konvergence $\implies$ lokálně stejnoměrná konvergence $\implies$ bodová konvergence. (Žádnou implikaci nelze obrátit.)

Věta 18.1.' Nechť $f_n \in C(I)$, nechť $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ v I. Potom $f \in C(I)$.

Poznámka. Připomeňme, že posloupnost $\{a_n\}$ konverguje (tj. $\exists a \in \mathbb{R}$ tak, že $a_n \to a$), právě když platí Bolzano-Cauchyho podmínka konvegence:

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall m,n \geq n_0\big)\big[|b_m - b_n| < \varepsilon\big]. \qquad \text{(BC)}$$

Definice. Řekneme, že funkce f_n splňují v I Bolzano-Cauchyho podmínku stejnoměrné konvergence, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall x \in I\big)\big(\forall m,n \geq n_0\big)\big[|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon\big]. \quad \text{(BC} - \text{st)}$$

Věta 18.4. Nechť f_n jsou definovány v I. Potom je ekvivalentní:
(1) existuje funkce $f(x)$ taková, že $f_n \rightrightarrows f$ v I
(2) f_n splňují v I Bolzano-Cauchyho podmínku stejnoměrné konvergence

Důsledek. $C([a,b])$ je úplný metrický prostor (vzhledem k metrice $\varrho(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$).

Poznámka. Jsou-li $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, pak obecně

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{x\to\infty} f_n(x)\Big) \neq \lim_{x\to\infty}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big).$$

Příklad. Nechť $f_n(x) = \operatorname{arctg}(x/n)$; potom $\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to\infty} f_n(x)) = \pi/2$, zatímco $\lim_{x\to\infty}(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = 0$.

Věta 18.5. [Moore-Osgood.] Nechť f_n, f jsou definovány v $\mathcal{P}(x_0, \delta)$ (x_0, $\delta > 0$ pevné.) Nechť

1. $f_n \rightrightarrows f$ v $\mathcal{P}(x_0, \delta)$;
2. pro $\forall n$ pevné existuje konečná $\lim_{x \to x_0} f_n(x)$ – značme ji c_n.

Potom

1. existuje konečná $\lim_{n \to \infty} c_n$ – značme ji c;
2. platí $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$.

Poznámka. Závěr 2 vlastně říká

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) .$$

Může být $x_0 = \pm\infty$, a platí jednostranné verze (tj. pro $x \to x_0\pm$, pracuji na $\mathcal{P}_\pm(x_0, \delta)$.)

Poznámka. Další nevýhodou bodové konvergence je, že obecně

$$f_n \to f \not\Rightarrow f_n' \to f' ,$$

dokonce ani

$$f_n \rightrightarrows f \not\Rightarrow f_n' \to f' .$$

Příklad. Polož $f_n(x) = n^{-1} \operatorname{arctg} nx$; potom $f_n \rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}$, leč $f_n'(0) = 1$ pro $\forall n$, tj. $f_n'(x) \not\to 0$.

Věta 18.6. [Derivace člen po členu.] Nechť f_n jsou diferencovatelné v otevřeném intervalu I. Nechť existují $x_0 \in I$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a funkce g takové, že $f_n(x_0) \to \alpha$, $f_n' \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} g$ v I.

Potom potom existuje diferencovatelná funkce f taková, že $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ v I a $f' = g$ v I.

Poznámka. Věta v podstatě říká, že

$$\left(\lim_{n \to \infty} f_n \right)' = \lim_{n \to \infty} f_n' .$$

Věta 18.6'.[Integrace člen po členu.] Nechť $u_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} u$ v I, nechť $\int u_n = U_n$ v I, a nechť existuje $x_0 \in I$, $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že $U_n(x_0) \to \alpha$.

Potom existuje funkce U taková, že $U_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} U$ na I a $\int u(x)\, dx = U(x)$ v I.

Poznámka. Závěr věty zapsaný jinak:

$$\int \lim_{n \to \infty} u_n(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int u_n(x)\, dx .$$

Definice. Nechť $f_k : I \to \mathbb{C}$ jsou dány. Označme

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) .$$

Řekneme, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

konverguje stejnoměrně v I, jestliže existuje funkce $s : I \to \mathbb{C}$ taková, že $s_n \rightrightarrows s$ v I.

Řekneme, že řada konverguje lokálně stejnoměrně v I, jestliže existuje s taková, že $s_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} s$ v I.

Věta 18.7. [Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady.]
Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje stejnoměrně v I. Potom $f_n \rightrightarrows 0$ v I.

Definice. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ splňuje v I Bolzano-Cauchyho podmínku (BC-st-r) stejnoměrné konvergence, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall x \in I\big)\big(\forall n \geq n_0\big)\big(\forall p \in \mathbb{N}\big)\big[\big|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\big| < \varepsilon\big]\,.$$

Věta 18.8. Nechť $f_k : I \to \mathbb{C}$ jsou dány. Potom je ekvivalentní:
(1) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje stejnoměrně v I
(2) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ splňuje v I (BC-st-r)

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje absolutně stejnoměrně v I, jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ konverguje stejnoměrně v I.

Věta 18.9. Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje absolutně stejnoměrně v I. Potom konverguje stejnoměrně v I.

Věta 18.10. [Weierstrass.] Jsou dány $f_k : I \to \mathbb{C}$. Nechť existují čísla a_k (nezávislá na x) taková, že
1. $|f_k(x)| \leq a_k$ pro $\forall x \in I$, $\forall k \in \mathbb{N}$;
2. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.
Potom $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje absolutně stejnoměrně v I.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{k^2}\right)$ konverguje lokálně absolutně stejnoměrně v $\mathbb{R}$. Nekonverguje stejnoměrně v $\mathbb{R}$.

Poznámka. Užitečné odhady: $|\sin y| \leq |y|$, $|\operatorname{arctg} y| \leq |y|$ pro $\forall y \in \mathbb{R}$; $0 \leq \ln(1+y) \leq y$ pro $\forall y \geq 0$.

Věta 18.11. Nechť $f_k \in C(I)$, nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje stejnoměrně v I. Označme $s(x)$ její součet. Potom $s(x) \in C(I)$.

Věta 18.12. Nechť $f_k \in C(I)$, kde $I = [a, b]$ je omezený, uzavřený interval. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje stejnoměrně v I. Potom

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx\,.$$

Věta 18.13. Nechť f_k jsou diferencovatelné v I (otevřený interval). Nechť pro $\forall x \in I$ pevné $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje, nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně v I. Potom součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ je diferencovatelná funkce a platí

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k', \qquad \forall x \in I\,.$$

. . . . . *29.10.14*

Definice. Řekneme, že f_n jsou stejnoměrně omezené v I, jestliže

$$\big(\exists M > 0\big)\big(\forall x \in I\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big[|f_n(x)| \le M\big]\,.$$

Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ má v I stejnoměrně omezené částečné součty, jestliže

$$\big(\exists M > 0\big)\big(\forall x \in I\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big[\big|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\big| \le M\big]\,.$$

Věta 18.14. [Stejnoměrná verze Dirichletova kritéria.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ má v I stejnoměrně omezené částečné součty, nechť $g_k(x) \rightrightarrows 0$ v I, a nechť pro $\forall x \in I$ pevné je posloupnost $\big\{g_k(x)\big\}_{k=1}^{\infty}$ monotónní.
Potom $\sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I.

Poznámka. Z Lemmatu 10.4 plyne pro $\forall x \neq 2k\pi$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \sin kx\right| \le \frac{1}{|\sin(x/2)|}\,, \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} \cos kx\right| \le \frac{1}{|\sin(x/2)|}\,.$$

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ konverguje stejnoměrně v $[\delta, 2\pi - \delta]$ pro $\delta > 0$ pevné. Nekonverguje stejnoměrně v $[0, \delta]$.

Poznámka. Nechť existuje n_0 (nezávislé na x) takové, že $f_k(x) = g_k(x)$ pro $\forall x \in I$, $\forall k \ge n_0$. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje stejnoměrně v I, právě když $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ konverguje stejnoměrně v I.

Věta 18.15. [Stejnoměrná verze Abelova kritéria.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje stejnoměrně v I. Nechť g_k jsou stejnoměrně omezené v I, a nechť pro $\forall x \in I$ pevné je posloupnost $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ monotónní. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ konverguje stejnoměrně v I.

. . . . . *31.10.14*

Poznámka. Výsledky kapitoly lze přímočaře zobecnit na situaci $f_n(x) : M \to Y$, kde $M \subset X$ a X, Y jsou metrické prostory. (V případě řad musí být Y vektorový prostor, ve větách o B.C. podmínce musí být Y úplný.)

Poznámka. Speciálním případem řady funkcí je mocninná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{MR}$$

Viz kapitola 11 minulého semestru. Je-li R poloměr konvergence, platí:
Tvrzení 1. Řada (MR) konverguje absolutně stejnoměrně na $U(0,r)$ pro každé $r < R$; konverguje lokálně absolutně stejnoměrně na $U(0,R)$.
Tvrzení 2. [Abelova věta] Nechť řada (MR) konverguje pro nějaké $x = z \in \mathbb{C}$, kde $|z| = R$. Potom konverguje stejnoměrně na úsečce $[0; z]$.

Příklad. Z dřívějška víme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x)\,, \qquad \forall x \in (-1,1)\,.$$

Podle Věty 18.12 řada vlevo konverguje stejnoměrně v $[0,1]$; podle Věty 18.13 je její součet $s(x)$ spojitý v $[0,1]$, speciálně je spojitý v bodě 1 zleva.
Tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = s(1) = \lim_{x\to 1-} s(x) = \lim_{x\to 1-} \ln(1+x) = \ln 2\,.$$

Třetí rovnost díky tomu, že $s(x) = \ln(1+x)$ na $P_-(1)$; čtvrtá ze spojitosti fce ln.

19. Lebesgueova míra.

Značení. X ... libovolná množina; symbolem 2^X značíme potenční množinu neboli množinu všech podmnožin X.
Připomeňme dále: rozdíl množin $A \setminus B = \{x \in A : \ x \notin B\}$, spočetné sjednocení množin (index j probíhá $\mathbb{N}$):

$$\bigcup_j A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \{x : \ \exists j \ x \in A_j\},$$

spočetný průnik množin:

$$\bigcap_j A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \{x : \ \forall j \ x \in A_j\}.$$

De Morganovy vzorce:

$$B \setminus \bigcup_j A_j = \bigcap_j (B \setminus A_j), \qquad\qquad B \setminus \bigcap_j A_j = \bigcup_j (B \setminus A_j).$$

Definice. Nechť X je libovolná množina. Řekneme, že $\mathscr{S} \subset 2^X$ je σ-algebra, pokud

1. $\emptyset$, $X \in \mathscr{S}$

2. $A \in \mathscr{S} \implies X \setminus A \in \mathscr{S}$

3. jsou-li $A_j \in \mathscr{S}$, $j \in \mathbb{N}$, je $\bigcup_j A_j \in \mathscr{S}$

Poznámka. Z vlastností σ-algebry dále plyne:

- jsou-li A, $B \in \mathscr{S}$, je také $A \setminus B \in \mathscr{S}$
- jsou-li $A_j \in \mathscr{S}$, $j \in \mathbb{N}$, je $\bigcap_j A_j \in \mathscr{S}$

Souhrně řečeno je σ-algebra systém množin, který je uzavřený na spočetné (=sigma) opakování množinových operací.

Příklady. $\mathscr{S} = \{\emptyset,\ X\}$ a $\mathscr{S} = 2^X$ jsou σ-algebry.

Definice. Nechť X je libovolná množina, $\mathscr{S} \subset 2^X$. Funkce $\mu : \mathscr{S} \to [0, +\infty]$ se nazve míra na X, jestliže

1. $\mathscr{S}$ je σ-algebra;

2. $\mu\emptyset = 0$

3. jsou-li $A_j \in \mathscr{S}$, $j \in \mathbb{N}$ disjunktní, je

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu A_j.$$

Trojice $(X, \mathscr{S}, \mu)$ se nazývá prostor s mírou, prvky $\mathscr{S}$ se nazývají měřitelné nebo μ-měřitelné množiny. Třetí vlastnost míry se nazývá σ-aditivita.

Příklady. ① Počítací míra p: X je libovolná množina, $\mathscr{S} = 2^X$; $pA =$ počet prvků A, je-li A konečná, a $pA = \infty$, je-li A nekonečná.
② Diracova míra δ_a v bodě a: X je libovolná množina, $a \in X$ pevně zvolený bod, $\mathscr{S} = 2^X$. $\delta_a(A) = 1$ pokud $a \in A$ a $\delta_a(A) = 0$ pokud $a \notin A$.
③ Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$ - zobecnění pojmu objem. Korektní zavedení Lebesgueovy míry je hlavním úkolem této kapitoly. Nelze $\mathscr{S} = 2^{\mathbb{R}^n}$, tj. existují Lebesgueovsky neměřitelné množiny, u nichž by pokus o přiřazení objemu vedl ke sporu.

. . . . . *5.11.14*

Věta 19.1. [Základní vlastnosti míry.] Nechť $(X, \mathscr{S}, \mu)$ je prostor s mírou, nechť A, A_j, B, $B_j \in \mathscr{S}$. Potom

1. $A \subset B \implies \mu A \leq \mu B$;

2. je-li $A_j \subset A_{j+1}$ pro $j \in \mathbb{N}$, pak $\lim_{j\to\infty} \mu A_j = \mu(\bigcup_j A_j)$;

3. je-li $B_j \supset B_{j+1}$ pro $j \in \mathbb{N}$, navíc $\mu B_1 < \infty$, pak $\lim_{j\to\infty} \mu B_j = \mu(\bigcap_j B_j)$.

Poznámky. Předpoklad $\mu B_1 < \infty$ v bodě 3 je podstatný: μ počítací míra na $\mathbb{N}$, $B_j = \{n \in N : \ n \geq j\}$. Pak $\mu B_j = \infty \not\to \mu(\bigcap_j B_j) = \mu(\emptyset) = 0$.
Pomocí triku zdisjunktnění (viz níže) se též snadno ukáže, že každá míra je σ-subaditivní: jsou-li $A_j \in \mathscr{S}$ *libovolné*, pak

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu A_j.$$

Trik zdisjunktnění. Pro libovolné množiny A_j, $j \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\tilde{A}_j := A_j \setminus \bigcup_{k<j} A_k.$$

Potom $\tilde{A}_j$ jsou vzájemně disjunktní, přitom

$$\bigcup_{j\leq n} A_j = \bigcup_{j\leq n} \tilde{A}_j, \qquad \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \tilde{A}_j.$$

. . . . . *7.11.14*

Definice. Intervalem v $\mathbb{R}$ rozumíme některou z množin

$$I = (a,b),\ [a,b],\ (a,b],\ [a,b).$$

Definujeme délku intervalu $\ell_1(I) = b - a$. Připouštíme prázdné, jednobodové i neomezené intervaly. Intervalem v $\mathbb{R}^n$ rozumíme „kvádr“

$$Q = I_1 \times \cdots \times I_n = \big\{x \in \mathbb{R}^n;\ x_j \in I_j\big\},$$

kde I_j jsou intervaly v $\mathbb{R}$. Objemem intervalu $Q \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme

$$\ell_n(Q) = \ell_1(I_1)\ell_1(I_2)\dots\ell_1(I_n);$$

pro účely této definice klademe $0 \cdot \infty = 0$.
Pokud je z kontextu jasné, že $Q \subset \mathbb{R}^n$, píšeme $\ell(Q)$ místo $\ell_n(Q)$.

Poznámky. Mezi intervaly speciálně patří: prázdná množina, jednobodová množina, přímky, roviny a vůbec „útvary nižší dimenze“ (jejichž objem je nula). Dále otevřený poloprostor

$$\big\{x \in \mathbb{R}^n;\ x_j > c\big\} = \mathbb{R} \times \dots (c, +\infty) \cdots \times \mathbb{R};$$

a uzavřený poloprostor

$$\big\{x \in \mathbb{R}^n;\ x_j \geq c\big\} = \mathbb{R} \times \dots [c, +\infty) \cdots \times \mathbb{R}.$$

Otevřeným (resp. uzavřeným) intervalem míníme $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$, jsou-li všechny $I_j \subset \mathbb{R}$ otevřené (resp. uzavřené).

Otevřený (resp. uzavřený) interval lze napsat jako průnik konečně mnoha otevřených (resp. uzavřených) poloprostorů. Otevřený (uzavřený) interval je otevřená (uzavřená) podmožina v $\mathbb{R}^n$ vzhledem k obvyklé metrice.

Definice. [Vnější Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$.] Pro libovolnou $M \subset \mathbb{R}^n$ definujeme

$$\lambda_n^*(M) = \inf \Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell_n(Q_j); \quad Q_j \subset \mathbb{R}^n \text{ jsou intervaly}, \ M \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j \Big\}.$$

Číslo $\lambda_n^*(M)$ se nazývá vnější Lebesgueova míra množiny $M \subset \mathbb{R}^n$. Nehrozí-li nedorozumění, píšeme opět λ^* místo λ_n^*.

Poznámky. Snadno nahlédneme, že platí:

- $0 \le \lambda^*(M) \le +\infty$
- $\lambda^*(\emptyset) = \lambda^*(\{a\}) = 0$
- $A \subset B \implies \lambda^*(A) \le \lambda^*(B)$
- λ^* je translačně invariantní, tj. $\lambda^*(M) = \lambda^*(a + M)$ pro každé $a \in \mathbb{R}^n$, kde

$$a + M := \big\{ a + m; \ m \in M \big\}.$$

Věta 19.2. Nechť $M_j \subset \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$, jsou *libovolné* množiny. Potom

$$\lambda^*\big(\bigcup_j M_j\big) \le \sum_j \lambda^*(M_j).$$

Jinými slovy, vnější míra je σ-subaditivní.

Lemma 19.1. [O konečném podpokrytí.] Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $K \subset X$ kompaktní, nechť $K \subset \bigcup_j A_j$, kde A_j jsou otevřené. Potom existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $K \subset \bigcup_{j \le n} A_j$.

Lemma 19.2. Nechť Q, $Q_j \subset \mathbb{R}^n$ jsou intervaly. Jestliže $Q \subset \bigcup_j Q_j$, potom $\ell(Q) \le \sum_j \ell(Q_j)$.

Důsledek. Pro každý interval $Q \subset \mathbb{R}^n$ je $\lambda^*(Q) = \ell(Q)$.

. . . . . *14.11.14*

Definice. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ se nazve měřitelná podle Carathéodoryho, pokud

$$\lambda^*(T) = \lambda^*(T \cap A) + \lambda^*(T \setminus A)$$

platí pro libovolnou „testovací" množinu $T \subset \mathbb{R}^n$.

Věta 19.3. [Carathéodoryova.] Označme

$$\mathscr{M}_n = \big\{M \subset \mathbb{R}^n;\ M \text{ je měřitelná dle Carathéodoryho}\big\}.$$

Potom $\mathscr{M}_n$ je σ-algebra a $\lambda_n^* : \mathscr{M}_n \to [0, +\infty]$ je míra.

Terminologie. $\mathscr{M}_n$ nazýváme Lebesgueovsky měřitelné podmnožiny $\mathbb{R}^n$; Lebesgueovu míru množiny $M \subset \mathbb{R}^n$ definujeme takto:

$$\lambda_n(M) := \begin{cases} \lambda_n^*(M), & \text{pokud } M \in \mathscr{M}_n, \\ \text{není definováno pro } M \notin \mathscr{M}_n. \end{cases}$$

Píšeme většinou $\mathscr{M}$, λ, tj. symbol n se vynechává, je-li z kontextu jasné, v jakém $\mathbb{R}^n$ se pohybujeme.

Lemma 19.3. Každý interval $Q \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelný a $\lambda(Q) = \ell(Q)$.

. . . . . *19.11.14*

Věta 19.4. [Další vlastnosti Lebesgueovy míry.]

1. Otevřené a uzavřené množiny jsou měřitelné.
2. Lebesgueova míra je translačně invariantní.
3. Lebesgueova míra je rotačně invariantní.[3]

Poznámka. Z důkazu předchozí věty též vyplývá: je-li $G \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná, otevřená množina, pak $\lambda(G) > 0$.

Definice. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ se nazve množina míry nula (nulová množina), jestliže $A \in \mathscr{M}_n$ a $\lambda_n(A) = 0$.

Věta 19.5. [Vlastnosti nulových množin.]

1. A je nulová, právě když $\lambda^*(A) = 0$.
2. A je nulová, $B \subset A \implies B$ je nulová.
3. A_j jsou nulové, $j \in \mathbb{N} \implies \bigcup_j A_j$ je nulová; speciálně spočetné množiny jsou nulové.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná. Řekneme, že výrok $V(x)$ platí skoro všude (zkratka „s.v.") v M, jestliže existuje nulová množina $N \subset M$ tak, že $V(x)$ platí pro každé $x \in M \setminus N$.

Příklady. ① Skoro všechna reálná čísla jsou iracionální ($N = \mathbb{Q}$).
② Funkce $\varphi : (x, y) \mapsto |x| + |y|$ je diferencovatelná skoro všude v $\mathbb{R}^2$. Zde $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0 \text{ nebo } y = 0\}$, což je sjednocení dvou přímek (intervaly nulového objemu).

[3] Bez důkazu.

20. Lebesgueův integrál.

Cíl kapitoly. Cílem kapitoly je definovat $\int_M f\,d\lambda$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina, $f(x) : M \to \mathbb{R}$ je funkce a $\lambda = \lambda_n$ je Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$.
Chceme, aby integrál fungoval pro co nejširší třídu funkcí, a měl některé rozumné vlastnosti:

- $\int_M (f+g) = \int_M f + \int_M g$ (linearita)
- $f \le g \implies \int_M f \le \int_M g$ (monotonie)
- $\int_M c = c\lambda(M)$
- rozumné věty o „záměně limity a integrálu", tj. (za vhodných předpokladů):

$$\lim_{j\to\infty} \int_M f_j = \int_M \lim_{j\to\infty} f_j, \qquad \frac{d}{da}\int_M f = \int_M \frac{\partial f}{\partial a}, \qquad \text{atd.}$$

Nám dosud známé integrály (Riemannův a Newtonův) fungují jenom pro M rovná se reálný interval; především však integrují příliš málo funkcí a nemají žádné (rozumně použitelné) věty o záměně limity a integrálu.
Názorný význam integrálu je „objem pod grafem funkce". Protože míru (objem) už umíme měřit ve všech $\mathbb{R}^n$, mohli bychom rovnou definovat:

$$\int_M f d\lambda_n = \lambda_{n+1}(\Gamma^+) - \lambda_{n+1}(\Gamma^-), \tag{3}$$

kde

$$\Gamma^+ = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1};\ x \in M,\ 0 < y < f(x)\big\},$$
$$\Gamma^- = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1};\ x \in M,\ f(x) < y < 0\big\}.$$

My podáme složitější (nicméně ekvivalentní) definici – ze dvou důvodů:

1. z definice (3) bychom těžko dokazovali například linearitu
2. níže uvedená definice zahrne obecnou situaci integrování podle libovolné míry (tj. nejen Lebesgueovy)

Značení. Máme prostor s mírou $(X, \mathscr{M}, \lambda)$, tj. $\mathscr{M}$ je σ-algebra měřitelných podmnožin X a λ je míra. Dále bude a $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \in \mathscr{M}$. (Lebesgeueova míra bude důležitý speciální případ.) Budeme také značit:

$$\{f > c\} = \{x \in M;\ f(x) > c\}, \qquad \{f \in I\} = \{x \in M;\ f(x) \in I\}, \quad \text{atd.}$$

Definice. Funkce $f : M \to \mathbb{R}$ se nazve měřitelná, jestliže M je měřitelná množina a dále pro každou $G \subset \mathbb{R}$ otevřenou je množina $\{f \in G\}$ měřitelná.

Lemma 20.1. [Ekvivalentní definice měřitelnosti.] Nechť M je měřitelná množina a $f : M \to \mathbb{R}$. Potom je ekvivalentní:

1. f je měřitelná;
2. pro $\forall c \in \mathbb{R}$ je množina $\{f > c\}$ měřitelná;
3. pro $\forall c \in \mathbb{R}$ je množina $\{f \geq c\}$ měřitelná;
4. pro $\forall c \in \mathbb{R}$ je množina $\{f < c\}$ měřitelná; nebo $\forall c \in \mathbb{R}$ je množina $\{f \leq c\}$ měřitelná;
5. pro každý interval $I \subset \mathbb{R}$ je množina $\{f \in I\}$ měřitelná;

..... *21.11.14*

Lemma 20.2 Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina, $f : M \to \mathbb{R}$. Nechť $M = G \cup N$, kde G je otevřená v $\mathbb{R}^n$, f je spojitá v G, a N je množina míry nula. Potom f je měřitelná v M.

Důsledek. Je-li $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ spojitá všude až na konečně bodů, je měřitelná v (a, b).

Lemma 20.3. Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je měřitelná; nechť $f(M) \subset G$, kde G je otevřená (v $\mathbb{R}$). Nechť $\phi : G \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom $\phi \circ f$ je měřitelná v M.

Poznámka. Při obráceném pořadí skládání (vnitřní spojitá, vnější měřitelná) nemusí vyjít měřitelná funkce.

Věta 20.1. [Zachování měřitelnosti.] Nechť f, g, $f_j : M \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce. Potom

1. αf, $f + g$, $f - g$, fg jsou měřitelné; f/g je měřitelné na množině $\{g \neq 0\}$;
2. $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, f^+, f^-, $|f|$ jsou měřitelné;
3. $\sup_j f_j$, $\inf_j f_j$ jsou měřitelné; jestliže existuje bodová limita $\lim_j f_j$, je též měřitelná.

Poznámka. V průběhu důkazu jsme odvodili užitečné vyjádření

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = \sup_n \big(\inf_{j\geq n} f_j(x) \big).$$

Definice. Charakteristickou funkcí množiny A rozumíme

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A. \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Funkce $f : M \to \mathbb{R}$ se nazve jednoduchá v M, jestliže existují měřitelné množiny $A_j \subset M$ a čísla $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$ tak, že

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}(x), \qquad x \in M.$$

Poznámky. ① Jednoduchou funkci lze vyjádřit více způsoby; vyjádření je jednoznačné, pokud požadujeme, aby A_j byly disjunktní a čísla c_j vzájemně různá.
② Pozorování: f je jednoduchá v $M \iff f$ je měřitelná v M a $f(M)$ je konečná množina

Věta 20.2. Nechť f je nezáporná, měřitelná funkce v M. Potom existují nezáporné, jednoduché funkce f_k takové, že $f_k(x) \to f(x)$ a navíc posloupnost $\{f_k(x)\}_k$ je neklesající pro každé $x \in M$.

Značení. Výše uvedený způsob konvergence značíme stručně: $0 \le f_k \nearrow f$.

Definice. [Abstraktní Lebesgueův integrál.] Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce.

1. je-li f jednoduchá, tj. $f = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j}$, definujeme $\int_M f d\lambda = \sum_{j=1}^n c_j \lambda(A_j)$.
2. je-li f nezáporná, klademe
$$\int_M f d\lambda = \sup\Big\{ \int_M s d\lambda;\ s \text{ jednoduchá v } M,\ 0 \le s \le f \Big\}.$$
3. pro obecnou f definujeme ($f^+ = \max\{0, f\}$, $f^- = \max\{0, -f\}$)
$$\int_M f d\lambda = \int_M f^+ d\lambda - \int_M f^- d\lambda,$$
má-li pravá strana smysl (tj. není tvaru $\infty - \infty$).

Poznámky. Definice je korektní: integrál jednoduché funkce nezávisí na jejím vyjádření. Druhý krok je zobecněním prvního.

. . . . . *28.11.14*

Terminologie a značení. Chceme-li zvýraznit proměnnou, píšeme $\int_M f(x) d\lambda(x)$. Naopak v případě $M \subset \mathbb{R}^n$ a λ - Lebesgeueova míra vynecháme symbol pro míru, tj. píšeme pouze $\int_M f(x) dx$.
Symbolem $\mathcal{L}^*(M)$ značíme funkce, pro něž je integrál definován (může být nekonečný).
Symbolem $\mathcal{L}(M)$ značíme funkce, pro něž je integrál definován a navíc je konečný. V této situaci říkáme, že integrál konverguje, neboli funkce je integrovatelná.

Věta 20.3. Nechť $f, g : M \to \mathbb{R}$ se rovnají skoro všude v M. Potom f je měřitelná, právě když g je měřitelná, a
$$\int_M f d\lambda = \int_M g d\lambda,$$
– má-li jedna strana smysl, má ho i druhá a rovnají se.

Zobecnění definice. Nechť f je definována skoro všude v M. Tj. $f(x) : \tilde{M} \to \mathbb{R}$, kde $M = \tilde{M} \cup N$, $\lambda(N) = 0$. Definujme $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ takto:
$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in \tilde{M}, \\ \text{libovolně (např. } 0), & x \in N. \end{cases}$$

Funkce f se nazve měřitelná v M, je-li $\tilde{f}$ měřitelná v M; a definujeme

$$\int_M f d\lambda = \int_M \tilde{f} d\lambda.$$

Díky předchozí větě nezávisí výsledek na dodefinování v množině N.

Příklady. ① $f(x) = 1/x$ je měřitelná v $\mathbb{R}$ ($N = \{0\}$).
② Je-li $D(x)$ Dirichletova funkce, pak $\int_{\mathbb{R}} D d\lambda_1 = 0$. Například proto, že $D = 0$ skoro všude.

Zobecnění definice 2. Budeme připouštět, aby měřitelné funkce nabývaly hodnot $\pm\infty$. (Připomeňme úmluvu $0 \cdot \pm\infty := 0$, která platí při výpočtu míry nebo integrálu.)

Věta 20.4. [Leviho věta.] Nechť f_n, f jsou měřitelné v M, a nechť $0 \le f_n(x) \nearrow f(x)$ s.v. v M. Potom $\int_M f_n \, d\lambda \to \int_M f \, d\lambda$.

. . . . . *3.12.14*

Věta 20.5. [Vlastnosti Lebesgueova integrálu.] Nechť f, $g \in \mathcal{L}^*(M)$. Potom:

1. (i) $\int_M \alpha f \, d\lambda = \alpha \int_M f \, d\lambda$;
   (ii) $\int_M (f+g) \, d\lambda = \int_M f \, d\lambda + \int_M g \, d\lambda$, má-li pravá strana smysl;
2. (i) $f \le g$ s.v. v $M \implies \int_M f \, d\lambda \le \int_M g \, d\lambda$;
   (ii) $\left| \int_M f \, d\lambda \right| \le \int_M |f| \, d\lambda$;
3. je-li f *nezáporná* s.v. v M, pak:
   (i) $\int_M f \, d\lambda < \infty \implies f < \infty$ s.v. v M;
   (ii) $\int_M f \, d\lambda = 0 \iff f = 0$ s.v. v M.

. . . . . *5.12.14*

Poznámky. Vlastnosti množiny $\mathcal{L}(M)$ integrovatelných funkcí:
① $f, g \in \mathcal{L}(M) \implies \alpha f, f+g \in \mathcal{L}(M)$ (vektorový prostor)
② $f \in \mathcal{L}(M) \iff f$ je měřitelná a $\int_M |f| \, d\lambda < \infty$
③ f měřitelná, $|f| \le g$ s.v. v M, kde $g \in \mathcal{L}(M) \implies f \in \mathcal{L}(M)$

Poznámka. Záměna limity a integrálu, neboli rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\lambda = \int_M \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) d\lambda \qquad (*)$$

obecně neplatí. Příklad: $f_n(x)(x) = n\chi_{(0,1/n)}(x)$. Potom $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$, přitom $f_n(x) \to 0$ v $\mathbb{R}$, tedy vlevo je 1, vpravo 0. – Rovnost (*) platí, pokud navíc předpokládáme: • $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v M, a $\lambda(M) < \infty$ (viz věta 15.2.) To jsou pro praktické účely příliš silné předpoklady. • $0 \le f_n \nearrow f$ skoro všude v M – to je Leviho věta. • třetí případ je následující věta.

Věta 20.6. [Lebesgueova věta.] Nechť funkce f_n, f jsou měřitelné v M, $f_n(x) \to f(x)$ pro skoro všechna $x \in M$. Nechť existuje $g \in L(M)$ tak, že $|f_n(x)| \leq g(x)$ skoro všude v M. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\lambda = \int_M \big(\lim_{n\to\infty} f_n \big) \, d\lambda \,.$$

Věta 20.7. [Leviho věta pro řady.] Nechť f_k jsou nezáporné, měřitelné v M. Potom

$$\int_M \big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \big) \, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f_k \, d\lambda \,.$$

Příklad.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} x^k \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 x^k \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty \,.$$

Věta 20.8. [Lebesgueova věta pro řady.] Nechť f_k jsou měřitelné funkce, nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = g(x)$ s.v. v M. Nechť existuje $g \in \mathcal{L}(M)$ tak, že $|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \leq g(x)$ pro $\forall n$, s.v. $x \in M$. Potom

$$\int_M \big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \big) \, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f_k \, d\lambda \,.$$

Příklad.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \,.$$

Majorantou částečných součtů je – vzhledem k teleskopičnosti sumy – první člen $f_0 = 1$.

Poznámka. Na množinách konečné míry mi jako integrovatelná majoranta může posloužit konstantní funkce. Získáváme tím variantu Lebesgueovy věty: nechť $f_n(x) \to f(x)$ s.v. v M, nechť $|f_n(x)| \leq C$ pro s.v. $x \in M$, a nechť $\lambda(M) < \infty$. Potom $\int_M f_n \, d\lambda \to \int_M f \, d\lambda$.

Věta 20.9. [Závislost integrálu na množině integrace.] Nechť f je měřitelná v M. Potom:

1. Jestliže $M = \bigcup_{j=1}^{N} M_j$, kde M_j jsou disjunktní, měřitelné, pak

$$\int_M f \, d\lambda = \sum_{j=1}^{N} \int_{M_j} f \, d\lambda,$$

   má-li pravá strana smysl.

2. Nechť $f \geq 0$ nebo $f \in \mathcal{L}(M)$. Jestliže $M = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} M_j$, kde M_j jsou disjunktní, měřitelné, pak

$$\int_M f \, d\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{M_j} f \, d\lambda.$$

3. Nechť $f \geq 0$ nebo $f \in \mathcal{L}(M)$. Jestliže $M = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} M_j$, kde M_j měřitelné a $M_j \subset M_{j+1}$, pak
$$\int_M f \, d\lambda = \lim_{j\to\infty} \int_{M_j} f \, d\lambda.$$

Poznámky. ① V předchozím důkazu se odvodí důležitý vztah:
$$\int_N f \, d\lambda = \int_M f \cdot \chi_N \, d\lambda$$
pro libovolnou měřitelnou $N \subset M$. Speciální důsledek: jestliže $N \subset M$ a $\lambda(M \setminus N) = 0$, pak $\int_N f \, d\lambda = \int_M f \, d\lambda$.
② Předpoklad „$f \geq 0$ nebo $f \in \mathcal{L}(M)$" v bodech 2, 3 předchozí věty je podstatný. Stačilo by předpokládat $f \in \mathcal{L}^*(M)$; NESTAČILO by předpokládat „má-li pravá strana smysl".

. . . . . *10.12.14*

Věta 20.10. [Výpočet Lebesgueova integrálu v $\mathbb{R}$.] Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$ je spojitá, kde $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ je interval. Nechť je splněn jeden z předpokladů:
1. $f(x) \geq 0$ (resp. $f(x) \leq 0$) všude v I
2. $\int_a^b |f(x)| \, dx < \infty$
Potom
$$\int_a^b f \, d\lambda_1 = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x) \,,$$
kde $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$.

Poznámky. • věta v podstatě tvrdí rovnost Lebesgueova a Newtonova integrálu (za daných předpokladů)
• předpoklad 1 nebo 2 je podstatný; lze najít spojitou funkci, jejíž Lebesgueův integrál neexistuje, avšak přírustek primitivní funkce má smysl (dokonce je konečný).
• předpoklad 2 se může ověřovat pomocí bodu 1 (neboť $|f| \geq 0$)
Poznámka. Problém: integrály závislé na parametru – studujeme funkce tvaru
$$F(a) = \int_J f(a, x) \, dx \,.$$

Pozor: F není primitivní funkce k f. Integruje se podle x, interval J je pevný. Nás zajímá závislost na a.

Příklad.
$$F(a) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-|a|x} \sin(ax) \, dx.$$
Přímý výpočet dá $F(a) = 1/2a$ pro $a \neq 0$, $F(0) = 0$. Vidíme, že $F(a)$ je nespojitá, třebaže integrand závisí na a spojitě. Vidíme, že předpoklad (iii) v následující větě nelze vynechat.

Značení. Je-li $f(a,x)$ funkce dvou proměnných, značí $f(a,\cdot)$ funkci jedné proměnné (tj. x), která vznikne, pokud a fixujeme. Podobně $f(\cdot,x)$ je funkcí jedné proměnné a při pevném x.

Věta 20.11. [Spojitá závislost integrálu na parametru.] Nechť $M \subset \mathbb{R}$ měřitelná, $a_0 \in \mathbb{R}$, $F : M \times U(a_0) \to \mathbb{R}$. Předpokládáme:
(i) pro všechna $a \in U(a_0)$ je $F(\cdot,a)$ měřitelná v M.
(ii) pro s.v. $x \in J$ je $F(\cdot,x)$ spojitá v a_0.
(iii) existuje $g \in L(M)$ tak, že pro každé $a \in U(a_0)$ platí $|F(x,a)| \le g(x)$ pro s.v. $x \in M$.
Potom je funkce

$$f(a) = \int\limits_M F(x,a)\,dx$$

konečná v $U(a_0)$ a spojitá v a_0.

Příklady. ① Gamma funkce

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$$

je spojitá v $(0,\infty)$.
Poznámka. Dále nás zajímá, zda platí

$$\frac{\partial}{\partial a}\int\limits_J f(a,x)\,dx = \int\limits_J \frac{\partial}{\partial a} f(a,x)\,dx\,.$$

Jde v podstatě o záměnu integrálu a limity(=derivace), tedy taková rovnost nemusí platit vždy. Srovnej předpoklad (iii) v následující větě.

Věta 20.12. [Derivace integrálu podle parametru.] Nechť $M \subset \mathbb{R}$ měřitelná, $I \subset \mathbb{R}$ otevřený interval, $f : M \times I \to \mathbb{R}$. Předpokládáme:
(i) pro $\forall a \in I$ pevné je $f(\cdot,a)$ měřitelná v M.
(ii) existuje $N \subset M$, $\lambda(N) = 0$ taková, že pro $x \in M \setminus N$, $a \in I$ existuje konečná $\partial_2 f(x,a)$.
(iii) existuje $g \in L(M)$ tak, že pro každé $a \in I$, $x \in M \setminus N$ platí, že $|\partial_2 f(x,a)| \le g(x)$.
(iv) existuje $a_1 \in I$ tak, že $f(\cdot,a_1) \in L(M)$.
Potom funkce $F(a) = \int_M f(a,x)\,dx$ je konečná a diferencovatelná v I a pro $a \in I$ platí

$$F'(a) = \int\limits_M \partial_2 f(x,a)\,dx.$$

. . . . . *12.12.14*

Příklady. ① Pro gamma funkci platí: $\Gamma'(s) = \int_0^\infty (\ln x) x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$,
$\Gamma''(s) = \int_0^\infty (\ln x)^2 x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx > 0$, – a tedy je ryze konvexní.

Poznámka. Ještě ke značení: je-li $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$, tak Lebesgueův integrál značíme $\int_M f\,d\lambda_n$, nebo $\int_M f(x)\,dx$, nebo $\int_M f(x)\,d\lambda_n(x)$. Závisí na tom, zda chceme

zdůraznit míru, nebo proměnnou, nebo obojí. Pokud chceme vyznačit jednotlivé složky proměnné, píšeme $\int_M f(x,y)\,dxdy$, nebo $\int_M f(x,y,z)\,dxdydz$.
Význam symbolu je ale vždy tentýž. Někdy se také píše $\iint$, $\iiint$ místo $\int$, aby se zdůraznilo, že jde o dvourozměrný (třírozměrný) integrál.

Značení. Pro $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ značíme proměnnou (x,y), $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Definujeme projekci M do $\mathbb{R}^n$

$$\Pi_n = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \exists y \in \mathbb{R}^m,\ (x,y) \in M\}$$

a pro $x \in \Pi_n$ pevné definujeme řez množinou M vzhledem k y

$$M^x = \{y \in \mathbb{R}^m;\ (x,y) \in M\}\,.$$

Jestliže $f = f(x,y)$, tak $f(x,\cdot)$ značí funkci proměnné y, které vznikne fixováním x.

Poznámka. Je-li $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ měřitelné, obecně nemusí platit, že $\Pi_n M$, M^x pro $x \in M$ jsou měřitelné.

Věta 20.13. [Fubiniho věta.] (S použitím předchozího značení.) Nechť $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$, nechť $f(x,y) \in L^*(M)$. Potom pro skoro všechna $x \in \Pi_n$ je $M^x \subset \mathbb{R}^m$ měřitelná množina, a $f(x,\cdot) \in L^*(M^x)$.
Označíme-li $g(x) = \int_{M^x} f(x,\cdot)d\lambda_m$, je $g(x) \in L^*(\mathbb{R}^n)$ a platí

$$\int_M f\,d\lambda_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} g\,d\lambda_n$$

neboli (v názornějším značení)

$$\int_M f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{M^x} f(x,y)\,dy \right) dx\,.$$

Příklad. $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 < 1\}$, $f(x,y) = |x|$. Potom $\Pi_1 M = (-1,1)$, $M^x = (-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2})$, tedy

$$\int_M |x|\,dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} |x|\,dy \right) dx = \frac{4}{3}\,.$$

Poznámky. Mechanické použití Fubiniho věty v případě, že $f \notin L^*(M)$, tj. původní vícenásobný integrál neexistuje, vede k nesmyslným výsledkům:
$M = (0,\infty) \times (0,\infty) \subset \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < y < x+1 \\ -1, & y < x < y+1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Potom $\int_M f(x,y)\,dxdy$ neexistuje (integrál kladné i záporné části je ∞), avšak

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty f(x,y)\,dy \right\} dx = -\frac{1}{2}\,,$$

zatímco

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty f(x,y)\,dx \right\} dy = \frac{1}{2}\,.$$

• předpoklad $f \in L^*(M)$ je určitě splněn, pokud $f \geq 0$, nebo pokud $\int_M |f| < \infty$ (druhý předpoklad může ověřit pomocí Fubiniho věty, neboť $|f| \geq 0$).
• speciálně, výpočet objemu pomocí Fubiniho věty:

$$\lambda_{n+m}(M) = \int_M 1\,d\lambda_{n+m} = \int_{R^n} \left\{ \int_{M^x} 1\,d\lambda_m \right\} d\lambda_n = \int_{R^n} \lambda_m(M^x)\,d\lambda_n$$

Příklad. Použití Fubiniho věty k výpočtu původně jednorozměrného integrálu:

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx\,.$$

Integrovaná funkce je přírustek, tj. integrál derivace

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \left[\frac{x^y}{\ln x} \right]_{y=a}^{y=b} = \int_a^b x^y\,dy\,.$$

Dvojím užitím Fubiniho věty ($M = (0,1) \times (a,b)$)

$$I = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y\,dy \right) dx = \int_M x^y\,dxdy = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y\,dx \right) dy = \ln \frac{b+1}{a+1}\,.$$

Opakování. Věta o substituci pro Newtonův integrál:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot |\varphi'(x)|\,dx$$

kde $\varphi(x) : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ je vzájemně jednoznačná, a $\varphi'(x) \neq 0$.

Definice. Pro $\varphi(y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definujeme Jakobián

$$J\varphi(y) = \det \nabla\varphi(y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1(y)}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1(y)}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_n(y)}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n(y)}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Definice. Nechť Ω, $M \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny. Zobrazení $\varphi(y) : \Omega \to M$ se nazve difeomorfismus, jestliže:

1. $\varphi(y)$ je vzájemně jednoznačné,
2. $\varphi(y)$ je C^1 (tj. parciální derivace jsou spojité),
3. $J\varphi(y) \neq 0$ pro $\forall y \in \Omega$.

*** Věta 20.14.** [Věta o substituci.] Nechť Ω, $M \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny, $\varphi(y) : \Omega \to M$ je difeomorfismus a $f(x) : M \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ měřitelná funkce. Potom

$$\int_M f(x)\,dx = \int_\Omega f(\varphi(y))|J\varphi(y)|\,dy\,,$$

neboli

$$\int_M f\,d\lambda_n = \int_\Omega (f \circ \varphi)|J\varphi|\,d\lambda_n\,.$$

(Má-li jedna strana smysl, má ho i druhá a rovnají se.)

Poznámka. Význam věty o substituci pro vícerozměrné integrály je často v tom, že získám příjemnější (z hlediska Fubiniho věty) tvar množiny, přes kterou integruji.

Příklad. Plocha množiny M, ohraničené přímkami: $x + y = 1$, $x + y = 2$, $y = 3x$, $y = 4x$. Substituce: $u = x + y$, $v = y/x$, neboli toto je zobrazení $\varphi^{-1} : M \to \Omega$, kde $\Omega = (1, 2) \times (3, 4)$.
$\varphi : \Omega \to M$ má tvar $x = u/(1 + v)$, $y = uv/(1 + v)$, jakobián $J\varphi = u/(1 + v)^2$. Tedy

$$\lambda_2(M) = \int_M 1\,dxdy = \int_\Omega \frac{u}{(1+v)^2}\,dudv = \int_1^2 \left(\int_3^4 \frac{u}{(1+v)^2}\,dv \right) du = \frac{3}{40}\,.$$

Polární souřadnice. Substituce $x = r\cos u$, $y = r\sin u$, tj. $\varphi : (r, u) \mapsto (x, y)$ je difeomorfismus z $\Omega = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ do $\mathbb{R}^2 \setminus N$, kde $N = \{(x, y);\ x \geq 0,\ y = 0\}$. (To, že obrazem není celé $\mathbb{R}^2$, nevadí, neboť chybějící množina N má dvourozměrnou míru 0.) Jakobián je r.

Sférické souřadnice. Substituce $x = r\cos u\cos v$, $y = r\sin u\cos v$, $z = r\sin v$. Zobrazení $\varphi : \langle r, u, v\rangle \mapsto \langle x, y, z\rangle$ je difeomorfismus z $\Omega = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ do $\mathbb{R}^3 \setminus N$, kde N je polorovina $y = 0$, $x \geq 0$, tj. opět množina míry nula. Jakobián je $r^2 \cos v$.
Názorně: u...zeměpisná délka, v...zeměpisná sířka (póly leží na ose z.)

21. Křivkový integrál.

Značení. Tučným fontem značíme vektory $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$. Norma vektoru $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, skalární součin $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$.

Definice. Množina $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ se nazve jednoduchá křivka, jestliže existuje $\boldsymbol{\varphi}(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\gamma = \boldsymbol{\varphi}([a, b]) = \big\{\boldsymbol{\varphi}(t);\ t \in [a, b]\big\}\,,$$

s těmito vlastnostmi:
(i) $\boldsymbol{\varphi}(t)$ je spojité a prosté v $[a, b]$

(ii) $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ je spojité v (a,b) a $\boldsymbol{\varphi}'(t) \neq \mathbf{0}$ pro $\forall t \in (a,b)$

Množina $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá jednoduchá uzavřená křivka, jestliže místo (i) požadujeme
(i') $\boldsymbol{\varphi}$ je spojité v $[a,b]$, prosté v $[a,b)$ a $\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\varphi}(b)$.

Terminologie: Dvojice $(\boldsymbol{\varphi}, [a,b])$ se nazývá parametrizace křivky. Alternativní terminologie (kterou my nepoužíváme) nazývá dvojici $(\boldsymbol{\varphi}, [a,b])$ křivkou, a γ je ,,geometrický obraz křivky". V případě neuzavřené křivky se $\boldsymbol{\varphi}(a)$, $\boldsymbol{\varphi}(b)$ nazývají krajní body.
Příklady. ① $\gamma = \{(x^2+y^2)^{3/2} = 2xy,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$, polární parametrizace $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\sin(2t)\cos(t), \sin(2t)\sin(t))$, $t \in [0, \pi/2]$.
②. Graf C^1 funkce $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ je křivka v R^2, parametrizace $\boldsymbol{\varphi}(t) = (t, f(t))$, $g \in [a,b]$.

Definice. Množina $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá zobecněná křivka, jestliže existují jednoduché křivky γ_j, $j = 1, \ldots, m$ tak, že
(i) $\gamma = \bigcup_{j=1}^m \gamma_j$,
(ii) po vynechání krajních bodů jsou γ_j vzájemně disjunktní.

Terminologie: $\{\gamma_i\}_{j=1}^m$ nazýváme přípustný rozklad křivky γ (není určen jednoznačně.)

Definice. [Integrál 1. druhu] Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je křivka a $f(x) : \gamma \to \mathbb{R}$ daná funkce. Integrál prvního druhu funkce f přes křivku γ značíme $\int_\gamma f\,ds$ a je definován takto:
1. Je-li γ jednoduchá křivka, pak

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t))\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|\,dt\,,$$

kde $(\boldsymbol{\varphi}, [a,b])$ je libovolná parametrizace γ.
2. Je-li γ zobecněná křivka, potom

$$\int_\gamma f\,ds = \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f\,ds\,,$$

kde $\{\gamma_i\}_{j=1}^m$ je libovolný přípustný rozklad γ.

Lemma 21.1. [O reparametrizaci.] Nechť γ je jednoduchá (neuzavřená) křivka. Nechť $(\boldsymbol{\varphi}, [a,b])$, $(\boldsymbol{\psi}, [c,d])$ jsou dvě různé její parametrizace.
Potom existuje vzájemně jednoznačná funkce $\omega(\tau) : [c,d] \to [a,b]$; přičemž $\omega(\tau)$ je spojitá v $[c,d]$, $\omega'(\tau)$ je konečná a nenulová v (c,d) a

$$\boldsymbol{\varphi}(\omega(\tau)) = \boldsymbol{\psi}(\tau) \qquad \forall \tau \in [c,d]\,.$$

Opakování. [Věta o substituci v $\mathbb{R}$] Nechť $\omega(\tau) : (c,d) \to (a,b)$ je vzájemně jednoznačná funkce, přičemž $\omega'(\tau)$ je konečná a nenulová v (c,d). Potom

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_{\omega_{-1}(a)}^{\omega_{-1}(b)} g(\omega(\tau))\omega'(\tau)\,d\tau = \int_c^d g(\omega(\tau))|\omega'(\tau)|\,d\tau\,.$$

Důsledek Lemmatu 21.1.[4] • Integrál prvního druhu nezávisí na parametrizaci, ani zvoleném rozkladu křivky. • Funkce ω' z Lemmatu 21.1 je na celém intervalu (c, d) buď kladná nebo záporná.

Definice. [Souhlasně orientované parametrizace] Řekneme, že parametrizace $(\varphi, [a, b])$ a $(\psi, [c, d])$ jednoduché křivky jsou ekvivalentní (souhlasně orientované) pokud platí, že funkce ω z Lemmatu 21.1 splňuje, že $\omega' > 0$ na (c, d).

Poznámka. Z vlastností fce ω z Lemmatu 21.1 plyne, že existují pouze dvě třídy ekvivalence souhlasné orientace jednoduché křivky.

Definice. Jednoduchá křivka je orientovaná, je-li určena jedna ze tříd ekvivalence souhlasné orientace. O každé parametrizaci s této třídy poté říkáme, že je shodě s orientací. Zobecněnou křivku orientujeme tak, že zvolíme nějaký přípustný rozklad, a orientujeme jeho jednotlivé elementy (tzv. orientovaný rozklad.)

Poznámky. • parametrizace přirozeně vyjadřuje orientaci: směr probíhání $\boldsymbol{\varphi}(t)$ pro t rostoucí. Říkáme, že parametrizace je/není ve shodě s orientací křivky.
• jednoduchá křivka připouští jen dvě různé orientace. U zobecněné křivky je jich více - přípustný rozklad s m prvky umožňuje 2^m různých orientací.
• Orientace lze také určit tím, že zadáme počáteční a koncový bod (p.b., k.b.). V případě, že $(\varphi, [a, b])$ a $(\psi, [c, d])$ jsou souhlasně orientované totiž platí $\omega(c) = a$ a $\omega(d) = b$. Tedy p.b. a k.b. se zachovává.

Příklad. Nechť $\gamma = \{x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\}$, orientovaná proti směru hodinových ručiček. Dvě různé parametrizace: $\boldsymbol{\varphi}(t) = (t, \sqrt{1 - t^2})$, $t \in [-1, 1]$ a $\boldsymbol{\psi}(\tau) = (\cos\tau, \sin\tau)$, $\tau \in [0, \pi]$. Druhá je ve shodě s orientací křivky. (Pozn. k Lemmatu 21.1: $\omega(\tau) = \cos\tau$.)

Definice. [Integrál 2. druhu.] Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je orientovaná křivka, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) : \gamma \to \mathbb{R}^n$ daná (vektorová) funkce. Integrál 2. druhu funkce $\boldsymbol{F}$ po křivce γ značíme $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds}$ a je definován takto:
1. Je-li γ jednoduchá, pak

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t)\, dt\,,$$

kde $(\boldsymbol{\varphi}, [a, b])$ je libovolná parametrizace γ, která je ve shodě s orientací.
2. Je-li γ zobecněná křivka, potom

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds}\,,$$

kde $\{\gamma_i\}_{j=1}^m$ je příslušný orientovaný rozklad γ.
Varianta značení: $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = F_1 dx + F_2 dy (+F_3 dz)$.

Důsledek Lemmatu 21.1. Integrál 2. druhu přes orientovanou křivku nezávisí na parametrizaci. Změníme-li orientaci křivky, vyjde s opačným znaménkem.

[4] Důkaz pro jednoduchou křivku.

Definice. Buď $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ orientovaná jednoduchá křivka a $(\varphi, [a,b])$ její parametrizace ve shodě s orientací. Tečný vektor křivky $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ v bodě $\boldsymbol{x}$ definujeme

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) := \frac{\boldsymbol{\varphi}'(t)}{\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|},$$

kde $t \in [a,b]$ je zvoleno tak, že $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$. Takto definovaný tečný vektor, někdy nazýváme tečný vektor ve shodě s orientací.

Poznámka. $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ nezávisí na zvolené parametrizaci. Není definován v krajních bodech (spojovacích bodech zobecněné křivky).
Ekvivalentně můžeme psát

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varphi}(t)) = \frac{\boldsymbol{\varphi}'(t)}{\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|}.$$

Věta 21.1.[Vztah integrálů 1. a 2. druhu.] Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je orientovaná křivka, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) : \gamma \to \mathbb{R}^n$. Potom

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_\gamma \big(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\big)\, ds\,,$$

kde $\boldsymbol{T}$ je tečný vektor ke γ, volený ve shodě s orientací.

Poznámka. Levá strana je integrál 2. druhu; pravá strana integrál 1. druhu (ze skalární funkce $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$.)

Poznámka. [Význam křivkových integrálů.]
① $\int_\gamma 1\, ds$ má význam délky křivky.
② je-li $\boldsymbol{F}$ pole (gravitační, elektrické), vyjadřuje $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ sílu, kterou překonává částice (jednotkové hmotnosti, náboje) pohybem po křivce, tedy $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds}$ je (až na znaménko a patřičnou konstantu) práce, kterou pohybem po křivce vykonáme

Definice. Řekneme, že (orientovaná zobecněná) křivka γ spojuje body $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$ („ jde od $\boldsymbol{x}_0$ do $\boldsymbol{x}_1$"), jestliže γ je určena orientovaným rozkladem $\{\gamma_i\}_{j=1}^m$, kde

(i) p.b. $\gamma_1 = \boldsymbol{x}_0$

(ii) k.b. $\gamma_j =$ p.b. γ_{j+1}, $j = 1, \dots, m-1$

(iii) k.b. $\gamma_m = \boldsymbol{x}_1$

Speciální případ: γ jednoduchá, orientovaná, p.b. $\gamma = \boldsymbol{x}_0$, k.b. $\gamma = \boldsymbol{x}_1$.
Pokud $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_1$ (tento případ nevylučujeme), jde o (zobecněnou) uzavřenou křivku.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazve křivkově souvislá, jestliže pro libovolné $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1 \in M$ existuje křivka γ spojující $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$ taková, že $\gamma \subset M$.
Otevřená, křivkově souvislá množina se nazývá oblast.

Příklady. ① konvexní množina je křivkově souvislá
② $\mathbb{R}^2$ s vynechanou polopřímkou je nekonvexní, křivkově souvislá množina

③ $\mathbb{R}^2$ s vynechanou přímkou není křivkově souvislá

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ vektorová funkce. Funkce $U(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}$ se nazve potenciál $\boldsymbol{F}$ v Ω, jestliže $U \in C^1(\Omega)$, a $\nabla U = \boldsymbol{F}$ v Ω, tj. $\frac{\partial}{\partial x_i} U(\boldsymbol{x}) = F_i(\boldsymbol{x})$ pro $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega$, $i = 1, \dots, n$.

Lemma 21.2. [O integrálu potenciálního pole.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ daná vektorová funkce. Nechť $U(\boldsymbol{x})$ je potenciál $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ v Ω.
Potom pro libovolnou křivku $\gamma \subset \Omega$, jdoucí od $\boldsymbol{x}_0$ do $\boldsymbol{x}_1$, platí

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = U(\boldsymbol{x}_1) - U(\boldsymbol{x}_0)\,.$$

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ daná vektorová funkce. Řekneme, že integrál z $\boldsymbol{F}$ nezávisí v Ω na cestě, jestliže

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_{\hat{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds}\,,$$

pro libovolné dvě křivky γ, $\hat{\gamma} \subset \Omega$, spojující tytéž body $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$.

Věta 21.2. [O existenci potenciálu.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá vektorová funkce. Potom je ekvivalentní:

(1) $\boldsymbol{F}$ má v Ω potenciál

(2) integrál z $\boldsymbol{F}$ nezávisí v Ω na cestě

(3) $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = 0$ pro každou jednoduchou, uzavřenou křivku γ v Ω.

Definice. Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, říkáme, že f je C^1 v $\overline{\Omega}$, jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existují a jsou spojité v Ω, a navíc mají spojité rozšíření do $\overline{\Omega}$.

Poznámka. Ve zbytku kapitoly se omezíme na situaci v $\mathbb{R}^2$. (Některá zobecnění do vyšších dimenzí uvedeme v přístí kapitole; nejsou přímočará.)

Definice. Je-li γ křivka v $\mathbb{R}^2$, normálovým vektorem $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{x} \in \gamma$ rozumíme jednotkový vektor, kolmý na tečný vektor $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$. (Není definován tam, kde není definován $\boldsymbol{T}$; je určen až na znaménko.)

Poznámka. Je-li (α, β) vektor v $\mathbb{R}^2$, pak $(-\beta, \alpha)$ vznikne otočením o $\pi/2$ proti směru hodinových ručiček, zatímco $(\beta, -\alpha)$ je čtvrtotáčka ve směru hodinových ručiček.
Úmluva: „v kladném smyslu" znamená „proti směru hodinových ručiček".

Definice. Divergence resp. rotace pole $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se definuje jako

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\,, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,.$$

Věta 21.3. [Gaussova.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je ,,rozumná" oblast, $\boldsymbol{F} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ je C^1. Nechť $\partial\Omega$ je zobecněná křivka. Potom

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F} \, d\lambda_2 = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, ds \,,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je normála k $\partial\Omega$, směřující ven z Ω (vnější normála.)

Věta 21.4. [Greenova.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je ,,rozumná" oblast, $\boldsymbol{G} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ je C^1. Nechť $\partial\Omega$ je zobecněná křivka, orientovaná tak, že na γ platí, že $\{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{T}\}$ je báze $\mathbb{R}^2$ souhlasně orientovaná s $\{e_1, e_2\}$. Potom

$$\int_\Omega \operatorname{rot} \boldsymbol{G} \, d\lambda_2 = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{ds} \,.$$

Lemma 21.3. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je C^1, a $\boldsymbol{F}$ má v Ω potenciál.
Potom $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$ v Ω.

Poznámka. Zajímavější je obrácené tvrzení, tj. podmínka $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$ (v praxi lehce ověřitelná) implikuje existenci potenciálu. Neobejde se však bez dodatečné podmínky na Ω.

Důsledek Greenovy věty. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je konvexní, $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je C^1, a $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$ v Ω.
Potom $\boldsymbol{F}$ má v Ω potenciál.