Lineární rovnice n-tého řádu

Před řešením příkladů si zopakujte následující definice a věty: Věta o fundamentálním systému homogenní rovnice n-tého řádu, jeho tvaru a speciální pravé straně, variace konstant

Příklady na cvičení
Popište obecné řešení:

1.
$$y^{III} - 3y'' + 3y' - y = 0$$

2.
$$y'' - 2y' - 3y = \mathrm{e}^{4x}$$

3.
$$y'' - y = 2\mathrm{e}^{x} - x^2$$

4.
$$y'' - 3y' + 2y = \sin x$$

5.
$$y'' + 4y' - 5y = 2\mathrm{e}^{x} \sin^2 x$$

6.
$$y'' - 2y' + y = 2x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x} \sin 2x$$

7.
$$y^{IV} - 5y'' + 4y = \sin x \cos 2x$$

8.
$$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^{x}}{x}$$

9.
$$y'' + 4y = 2\mathrm{tg}\, x$$

10.
$$y'' + y' = \frac{1}{1 + \exp x}$$

11.
$$x^2 y^{III} = 2y'$$

12.
$$x^2 y'' + xy' + 4y = 10x$$

Variační počet-hledání kritických bodů

Před řešením příkladů si zopakujte následující definice a věty: věta o Euler-Lagrangeových rovnicích (nutná podmínka extrému)

Příklady na cvičení

Nalezněte extremály následujících úloh na daných množinách. **1.** $\Phi(y) = \int_1^3 2y - yy' + x[y']^2 \,\mathrm{d}x$ na $M = \{y \in C^2(1,3), y(1) = 1, y(3) = 4\}$ **2.** $\Phi(y) = \int_1^2 [xy' + y]^2 \,\mathrm{d}x$ na $M = \{y \in C^2(1,2), y(1) = 1, y(2) = 1/2\}$

3. Dokažte, že úloha

$$\Phi(y) = \int_{-1}^{1} x^2 [y']^2 \,\mathrm{d}x, \quad y(-1) = -1, y(1) = 1$$

nemá minimum v množině funkcí $C^1(-1,1)$. **4.** * Navrhněte tvar skluzavky tak, aby cesta z bodu $[0, A]$ do $[B, 0]$ (kde $A, B > 0$) byla co nejrychlejší. Zanedbejte tření na skluzavce a předpokládejte, že pohyb je působen pouze gravitační silou.

Příklady na doma

Nalezněte extremály následujících úloh na daných množinách. **5.** $\Phi(y) = \int_{\pi/4}^{\pi/2} [y - \frac{1}{2}[y']^2] \sin(x) \,\mathrm{d}x$ na $M = \{y \in C^2(\pi/4, \pi/2), y(\pi/4) = -\lg\sqrt{2}, y(\pi/2) = 0\}$ **6.** $\Phi(y) = \int_0^\pi [y']^2 - \frac{16}{9}y^2 + 2y\sin(x) \,\mathrm{d}x$ na $M = \{y \in C^2(0,\pi), y(0) = 0, y(\pi) = -\sqrt{3}/2\}$ **7.** $\Phi(y) = \int_0^\pi [y']^2 - \frac{25}{9}y^2 + 68y\exp(x) \,\mathrm{d}x$ na $M = \{y \in C^2(0,\pi), y(0) = 0, y(\pi) = 0\}$ **8.** $\Phi(y) = \int_0^1 x^2 y + 2xy \,\mathrm{d}x$ na $M = \{y \in C^2(0,1), y(0) = 0, y(1) = 1\}$

– –

nmaf061-zimní semestr 2014-cvičení 3 Petr Kaplický (2014)

Variační počet-postačující podmínka extrému, extrém s vazbou

Před řešením příkladů si zopakujte následující definice a věty:

Příklady na cvičení

1. Uvažte funkcionál $F(u) := \int_0^\pi |u'(x)|^2 \,\mathrm{d}x$ na množině $X_0 := \{u \in C^1(0,\pi); u(0) = u(\pi) = 0\}$. Označme $X_1 = \{u \in X_0; \int_0^\pi u^2(x)\,\mathrm{d}x = 1\}$. Ukažte, že existuje $\lambda = \min_{X_1} F$ a že $\lambda > 0$ je první vlastní číslo Laplaceovy rovnice (tj. $-u'' = \lambda u$ v $(0,\pi)$. Jakým způsobem se dají spočítat další vlastní čísla?

Pomocí Jacobiho věty vyšetřete extremály úloh. **2.** $\Phi(y) = \int_0^\pi [y']^3 \,\mathrm{d}x$ na $M = \{y \in C^2(0,\pi), y(0) = 0, y(\pi) = a\pi, a > 0\}$ **3.** $\Phi(y) = \int_0^1 [y']^3 + 3[y']^2 + y' \,\mathrm{d}x$ na $M = \{y \in C^2(0,1), y(0) = 0, y(1) = 1\}$

Příklady na doma

Pomocí Jacobiho věty vyšetřete extremály úloh. **4.** $\Phi(y) = \int_1^2 x^2[y']^3 \,\mathrm{d}x$ na $M = \{y \in C^2(1,2), y(1) = 0, y(2) = \lg 2\}$ **5.** $\Phi(y) = \int_1^2 y^3[y']^3 \,\mathrm{d}x$ na $M = \{y \in C^2(1,2), y(1) = 2, y(2) = 2\sqrt{2}\}$ **6.** $\Phi(y) = \int_0^1 [y']^3/y^3 \,\mathrm{d}x$ na $M = \{y \in C^2(,), y(0) = 1, y(1) = e, y > 0\}$ **7.** $\Phi(y) = \int_1^2 [[y']^2 - y^2] \exp(-2x) \,\mathrm{d}x$ na $M = \{y \in C^2(1,2), y(1) = e, y(2) = \exp(2)\}$

8. Najděte maximum $\Phi(y) = \int_{-1}^1 y^2 \,\mathrm{d}x$ na množině funkcí $M = \{y \in C^1(-1,1), y(-1) = y(1) = 0, \int_{-1}^1 [y']^2 = \pi/2\}$. **9.** * Jaký tvar zaujme lano dane delky zavěšene mezi dvěma stožáry?

– –

Klasické problémy variačního počtu

Podle knihy One-dimensional Variational Problems od G. Butazzo, M. Giaquinta a S. Hildebrandt.

Fermatův princip v geomerické optice

Fermatův princip: "la nature agit toujour par les voies les plus courtes" (příroda vždy volí nejsnadnější cestu). V geometrické optice, světlo se pohybuje z bodu do bodu nejrychleji jak je možné.

1. Odvoďte zákon lomu světla z Fermatova principu. Předpokládejte, že máme dvě media oddělená v $\mathbf{R}^2$ osou x a světlo prochází z bodu A v jednom z nich do bodu B ve druhém. Definujme optickou hustotu $n(x,y) = n_1$ pro $y \geq 0$ a $= n_2$ pro $y < 0$. Řešte problém

$$\min\{\int_0^1 n(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t : \varphi(0) = A, \varphi(1) = B\}.$$

Rozmyslete si, že řešení musí být v každé polorovině lineární a stačí tedy hledat minimum funkce $T(x) = n_1[(a_1 - x)^2 + a_2^2]^{1/2} + n_2[(b_1 - x)^2 + b_2^2]^{1/2}$. Kde bod $[x, 0]$ reprezentuje bod lomu.

Brachystochrona

Problém byl formulován roku 1638 Galileem, ale správné řešení bylo nalezeno až 1697 Johannem Bernoulli. Úloha zní

2. Mějme dány body $a, b \in \mathbf{R}^2$ tak, že $a_1 < b_1$ a $a_2 > b_2$. Předpokládejme, že v $\mathbf{R}^2$ působí gravitace ve směru $(0, -1)$ a gravitační zryhlení je $g > 0$. Najděte křivku, po které se musí pohybovat hmotný bod pouze vlivem gravitace tak, aby čas potřebný pro cestu z bodu a (z nulové rychlosti) do bodu b byl minimální. Je-li dráha hmotného bodu popsaná grafem funkce $u : (a_1, b_1) \to \mathbf{R}$ je čas potřebný k cestě z a do b pouze pomocí gravitace roven

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{a_1}^{b_1} \sqrt{\frac{1 + |u'(x)|^2}{a_2 - u(x)}}\,\mathrm{d}x.$$

Ukažte, že extremála řeší rovnici: $c^2 = (a_2 - u)(1 + |u'|^2)$. Řešení této rovnice hledejte v parametrickém tvaru $x = x(t)$ a $u(x(t)) = a_2 - (1 - \cos(t))/(2c^2)$.

Řetězovka

Problém od Galilea z roku 1638. Úlohu vyřešili nezávisle J. a J. Bernoulli, Huzgens, Leibniz okolo 1690.

3. Najděte tvar tenké, hmotné, homogenní, nepružné struny upevněné v bodech $A, B \in \mathbf{R}^2$.

Předpokádejte, že tvar struny je popsán funkcí $u : (a_1, b_1) \to \mathbf{R}$, předepsaná délka struny je $L > b_1 - a_1 > 0$. Minimalizujte potenciální energii danou výrazem

$$\Phi(u) = \int_{a_1}^{b_1} u(x)\sqrt{1 + |u'(x)|^2}\,\mathrm{d}x$$

za dodatečných podmínek $u(a_1) = a_2$, $u(b_1) = b_2$,

$$\Psi(u) = \int_{a_1}^{b_1} \sqrt{1 + |u'(x)|^2}\,\mathrm{d}x = L. \tag{1}$$

Uvědomte si, že Φ a Ψ závisí pouze na u a u'. Extremála u musí řešit rovnici $c^2(1+|u'|^2) = (u+\lambda)^2$ pro jisté $c, \lambda \in \mathbf{R}$.

Newtonův problém optimálního aerodynamického profilu

Problém řešil Newton kolem roku 1685.

4. Určete tvar rotačně symetrického tělesa tak, aby jeho odpor pri pohybu ve řídké kapalině byl minimální. Předpokládáme-li, že profil tělesa je dán funkcí $u : (0, R) \to \mathbf{R}$ pro dané $R > 0$ Newton vyjádřil odpor tělesa vzorcem

$$\Phi(u) = \int_0^R \frac{r}{1+|u'(r)|^2}\,\mathrm{d}r.$$

Ukažte, že bez dalších předpokladů je $\inf \Phi = 0$. Přidejte omezení $\max_{(0,R)} u \leq M$ pro danou $M > 0$ a ukažte, že ani tato podmínka nezaručí, že $\inf \Phi > 0$. Předpokládejte navíc, že u je nerostoucí a konkávní a uvažte následující problém

$$\min\{\Phi(u) : u(0) = M, u(R) = 0, u' \leq 0\}.$$

Pomocí transformace $v(s) = u^{-1}(M - s)$ se tento problém transformuje na

$$\min\{\int_0^M \frac{v(s)v'(s)}{1+|v'(s)|^2}\,\mathrm{d}s + \frac{|v(0)|^2}{2}, v(0) \geq 0, v(M) = R, v' \geq 0\}.$$

Podobně jako na přednášce pro tento problém odvoďte Eulerovi-Lagrangeovi rovnice a také zákon zachování energie. Po úpravě byste měli dostat rovnici

$$v\frac{(v')^3}{(1+|v'|^2)^2} = \frac{c}{2}.$$

Předpokládejme, že v' je na $(0, R)$ monotonní, označme $I = R(v')$ a definujme nové funkce předpisy $w(z) := v((v')_{-1}(z))$ a $\tau(z) := (v')_{-1}(z)$. Dostanete rovnice

$$w(z) = \frac{c}{2}\frac{(1+z^2)^2}{z^3}, \tag{2}$$

$$\tau'(z) = \frac{c}{2}\left(-\frac{2}{z^3} + \frac{1}{z} - \frac{3}{z^5}\right). \tag{3}$$

Nyní zbývá integrovat a vrátit se zpět k původním funkcím. Nezapomeňte také diskutovat volbu konstant, které se objevily v průběhu řešení.
