4. zkoušková písemka, NMAF061, ZS 2010

Každý krok krátce a správně odůvodněte.

1. Spočtěte $\lambda_3(M)$, je-li $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x^2 + y^2 + z^2)^2 < xyz\}$. Odůvodněte, proč je M měřitelná.

2. Pomocí derivování integrálu podle parametru spočtěte
$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax^2}}{e^{x^2}} \mathrm{d}x.$$

3. Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí
$$f_n(x) = \sqrt[3]{e^n \frac{(x-1)^n}{n+2}}.$$
Zjistěte, pro které $x \in \mathbb{R}$ posloupnost konverguje a pro které ne. Zjistěte, na kterých intervalech posloupnost konverguje stejnoměrně případně lokálně stejnoměrně.

4. Spočtěte křivkový integrál $\int_\gamma |y| \mathrm{d}s$ přes křivku
$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)\}.$$

4. skoušková písemka – nmaf061 – ZS2010 – řešení

1) M je otevřená množina – tedy je měřitelná

Použijeme sférické souřadnice: Víme, že splňují předpoklady o substituci

a $\int_M 1 \, d\lambda_3 = \int_N r^2 \cos\varphi \, dr \, d\varphi \, d\vartheta$, kde

$$N = \Phi_{-1}(M) \; ; \quad \Phi: \begin{array}{l} x = r\cos\varphi\cos\vartheta \\ y = r\cos\varphi\sin\vartheta \\ z = r\sin\varphi \end{array} \qquad \begin{array}{l} r > 0, \ \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \vartheta \in (0, 2\pi) \end{array}$$

Tedy: $N = \{(r, \varphi, \vartheta) : r > 0; \ \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \ \vartheta \in (0, 2\pi)$ &
$r < \cos^2\varphi \sin\varphi \cos\vartheta \sin\vartheta \}$

Z podmínky podm. máme obor φ a ϑ: $\cos^2\varphi \geq 0$

a) $\sin\varphi > 0$ tzn. $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin 2\vartheta > 0$ tzn.
$\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3}{2}\pi)$

b) $\sin\varphi < 0$ tzn $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \Rightarrow \sin 2\vartheta < 0$ tzn.
$\vartheta \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$.

Díky periodicitě sin a cos, platí

$$\int_N r^2 \cos\varphi \, dr \, d\varphi \, d\vartheta = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos^2\varphi \sin\varphi \cos\vartheta \sin\vartheta} r^2 \cos\varphi \, dr \, d\varphi \, d\vartheta =$$

$$4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3} \cos^7\varphi \sin^3\varphi \cos^3\vartheta \sin^3\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^7\varphi (1 - \cos^2\varphi) \sin\varphi \, d\varphi \cdot$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3\vartheta (1 - \sin^2\vartheta) \cos\vartheta \, d\vartheta = \frac{4}{3} \int_0^1 t^7 - t^9 \, dt \int_0^1 t^3 - t^5 \, dt =$$

$$\frac{4}{3} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{80} \cdot \frac{2}{24} = \frac{1}{360}$$

2) Předpoklady věty o der. dle parametru: def $f(x,a) := \frac{1-e^{-ax^2}}{e^{x^2}}$

1) $f(\cdot, a)$ je spoj. a tedy měř. $\forall a \in \mathbb{R}$

2) $f(x,\cdot)$ je $C^\infty(\mathbb{R})$ $\forall x \in \mathbb{R}$ a $\frac{\partial f}{\partial a}(x,a) = x^2 e^{-ax^2 - x^2}$

3) $F(0) = 0$

4) Fix $\varepsilon > 0$. Pro $a \in (-1+\varepsilon, +\infty)$: $\left|\frac{\partial f}{\partial a}(x,a)\right| \leq x^2 e^{+(1-\varepsilon)x^2 - x^2}$ $\forall x > 0$

$$= x^2 e^{-\varepsilon x^2} \in \mathcal{L}(0,+\infty)$$

$$\Rightarrow F'(a) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{(-a-1)x^2} = \int_0^{+\infty} x \cdot x e^{-(a+1)x^2}\,dx$$

$$x \xrightarrow{d} 1 \qquad x e^{-(a+1)x^2} \xrightarrow{i} \frac{e^{-(a+1)x^2}}{-(a+1)\cdot 2}$$

$$= \left[x \cdot \frac{e^{-(a+1)x^2}}{-2(a+1)}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(a+1)} e^{-(a+1)x^2}\,dx \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{2(a+1)^{3/2}}$$

Tedy: $F(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(-\frac{(a+1)^{-1/2}}{\frac{1}{2}}\right) + C$

$\cancel{F(0) = \sqrt{\pi} \frac{-1}{\sqrt{a+1}} + C \Rightarrow C}$

$F(0) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} + C \Rightarrow C = \sqrt{\pi}$ a

$$F(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a+1}}\right) \qquad \forall a > -1$$

Pro $a \leq -1$ integrál diverguje.

3) $f_n(x) = \sqrt[3]{\dfrac{[e(x-1)]^n}{n+2}}$

bodová konv. (záleží na velikosti $e\cdot(x-1)$):

$$f_n(x) \to 0 \quad \text{pro } |e\cdot(x-1)| \leq 1 \quad \text{tzn } x \in \left[1-\tfrac{1}{e}, 1+\tfrac{1}{e}\right]$$

$$\to +\infty \quad \text{pro } e\cdot(x-1) > 1 \qquad x > 1+\tfrac{1}{e}$$

$$\to \text{diverg. neex.} \quad \text{pro } e\cdot(x-1) < -1 \qquad x < 1-\tfrac{1}{e}$$

---

stejnoměrná konvergence přichází v úvahu pouze na $\left[1-\frac{1}{e}, 1+\frac{1}{e}\right]$

a tam také $f_n \rightrightarrows 0$ na $\left[1-\frac{1}{e}, 1+\frac{1}{e}\right]$, protože

$$|f_n| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} \quad \text{na } \left[1-\tfrac{1}{e}, 1+\tfrac{1}{e}\right].$$

4) Hledáme parametrizaci pomocí polárních souřadnic (pp. $a>0$)

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \quad \text{a} \quad (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

tedy: $r^4 = a^2 r^2 \cos 2\varphi \Rightarrow r^2 = a^2\cos 2\varphi \Rightarrow r = a\cdot\sqrt{\cos 2\varphi}$

Parametrizace: $\phi(\varphi) = \left(a\cdot\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi,\ a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\sin\varphi\right) \Rightarrow \cos 2\varphi > 0$

pro $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ a $\varphi \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

Ze symetrie: $\displaystyle\int_\gamma |y|\,ds = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi}\,|\sin\varphi|\cdot|\phi'(\varphi)|\,d\varphi = I$

$$\phi'(\varphi) = \left(a\frac{-1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\sin 2\varphi\cos\varphi - a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi,\right.$$
$$\left. a\frac{-1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\sin 2\varphi\sin\varphi + a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\right)$$

$$|\phi'(\varphi)|^2 = a^2\frac{1}{(\sqrt{\cos 2\varphi})^2}\sin^2 2\varphi + a^2\cos 2\varphi = a^2\frac{1}{\cos 2\varphi}$$

$\Rightarrow |\phi'(\varphi)| = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ a $\displaystyle I = 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2|\sin\varphi|\,d\varphi = 4a^2\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi/4} = 2a^2(2-\sqrt{2})$