16. Diferenciální rovnice-dodatek.

Definice. Rovnice

$$b_0 y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \cdots + b_n y = f(x)\,, \tag{1}$$

kde $b_j \in \mathbb{C}$ jsou konstanty ($b_0 \neq 0$), se nazývá lineární ODR řádu n s konstantními koeficienty. Značíme $\mathscr{K}[y] = \sum_{k=0}^{n} b_k y^{(n-k)}$. Rovnice

$$\mathscr{K}[y] = 0 \tag{2}$$

je odpovídající homogenní úloha.

Poznámka. Hlavní myšlenka teorie rovnic s konstantními koeficienty: hledejme řešení tvaru $y(x) = \exp(\lambda x)$. Pozoruji, že $\mathscr{K}[\exp(\lambda x)] = p(\lambda)\exp(\lambda x)$, kde

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} b_k \lambda^{n-k}\,. \tag{3}$$

Tedy: je-li λ_0 kořenem polynomu $p(\lambda)$, tak funkce $\exp(\lambda_0 x)$ je řešením homogenní úlohy.

Definice. Polynom (3) se nazývá charakteristický polynom rovnice (1).

Poznámky. Každý polynom $p = p(\lambda)$ lze napsat jako

$$p(\lambda) = a(\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

kde $\lambda_1, \dots \lambda_s \in \mathbb{C}$ jsou navzájem různé kořeny, a $n_1, \dots n_s$ jsou jejich násobnosti.
Platí: $n_1 + \cdots + n_s$ rovná se stupeň polynomu.
Dále: λ_0 je kořen polynomu $p(\lambda)$ násobnosti k, právě když $0 = p(\lambda_0) = p'(\lambda_0) = \cdots = p^{(k-1)}(\lambda_0)$, avšak $p^{(k)}(\lambda_0) \neq 0$.
Ke stupni polynomu: $a\lambda + b$, kde $a \neq 0$, je polynom stupně 1. Nenulová konstanta je polynom stupně 0. Identicky nulová funkce se považuje za polynom záporného stupně.

Lemma 16.3. Je dán operátor $\mathscr{K}[y]$ a $p(\lambda)$ je jeho charakteristický polynom. Potom pro $\forall l \geq 0$ celé

$$\mathscr{K}[x^l \exp(\lambda x)] = \exp(\lambda x) \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} p^{(j)}(\lambda) x^{l-j}\,.$$

Důsledek. Je-li λ_0 kořen char. polynomu násobnosti k, pak funkce $\exp(\lambda_0 x)$, $x\exp(\lambda_0 x)$, $\dots$, $x^{k-1}\exp(\lambda_0 x)$ řeší homogenní úlohu (2).

Poznámka. Připomeňme tvrzení (které plyne např. jako speciální případ Věty 11.6): je-li $q(x)$ polynom a $q(x) \equiv 0$, tak nutně $q(x)$ je triviální (tj. má všechny koeficienty nulové.)
Totéž řečeno jinak: funkce 1, x, x^2, $\dots x^k$, $\dots$ jsou lineárně nezávislé.
Následující lemma můžeme chápat jako zobecnění tohoto faktu.

Lemma 16.4. Nechť $\lambda_j \in \mathbb{C}$ jsou vzájemně různá čísla, nechť $q_j(x)$ jsou polynomy. Jestliže $\sum_{j=1}^{m} q_j(x) \exp(\lambda_j x) \equiv 0$, pak nutně $q_j(x) \equiv 0$ pro $\forall j$.

Věta 16.16. [F.S. pro $\mathscr{K}[y] = 0$.] Je dán operátor $\mathscr{K}[y]$ a $p(\lambda)$ je jeho charakteristický polynom. Nechť λ_j, $j = 1, \dots, s$, jsou jeho kořeny, a n_j, $j = 1, \dots s$, jsou odpovídající násobnosti. Potom funkce

$$x^l \exp(\lambda_j x) \qquad j = 1, \dots s, \ l = 0, \dots n_j - 1$$

tvoří fundamentální systém homogenní úlohy (2).

Příklad. $y^{(5)} - y^{(4)} - 5y^{(3)} + y'' + 8y' + 4y = 0$, charakteristický polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 - 5\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda + 4 = (\lambda + 1)^3(\lambda - 2)^2$$

-1 je 3-násobný, 2 je 2-násobný kořen, $\Longrightarrow$ fundamentální systém:

$$\left\{ \exp(-x), x\exp(-x), x^2\exp(-x), \exp(2x), x\exp(2x) \right\}$$

obecné řešení:

$$K_1 \exp(-x) + K_2 x \exp(-x) + K_3 x^2 \exp(-x) + K_4 \exp(2x) + K_5 x \exp(2x)$$

kde $K_i \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Poznámka. V případě, že $p(\lambda)$ má komplexní kořeny:
1. možnost: celou teorii uvažujeme "komplexní", tj. hledáme řešení $y(x) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, počáteční podmínka $y^{(j-1)}(x_0) = \eta_j$, $j = 1, \dots, n$, kde $\eta_j \in \mathbb{C}$. Takto to funguje a nevadí mi komplexní b_k, ani komplexní kořeny.
2. možnost: chceme "reálnou" variantu, tj. hledáme jen řešení $y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a předpokládáme $b_k \in \mathbb{R}$ (reálné koeficienty v rovnici.)
Z reálnosti b_k plynou dvě věci:
(i) $\lambda \in \mathbb{C}$ je kořen $p(\lambda)$ násobnosti $k \implies \overline{\lambda}$ je kořen násobnosti k
(ii) funkce $y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ řeší $\mathscr{K}[y] = 0 \implies$ funkce $\operatorname{Re} y(x)$, $\operatorname{Im} y(x)$ řeší $\mathscr{K}[y] = 0$.
Je-li $\lambda = \alpha + i\beta$ kořen násobnosti k, získáme dle V.12.10 funkce

$$\begin{aligned} &\exp(\lambda x), \ x\exp(\lambda x), \ \dots, x^{k-1}\exp(\lambda x) \\ &\exp(\overline{\lambda} x), \ x\exp(\overline{\lambda} x), \ \dots, x^{k-1}\exp(\overline{\lambda} x) \end{aligned}$$

místo nich ale vezmeme jejich reálné a imaginární části (s užitím $\exp(\lambda x) = \exp(\alpha x)[\cos\beta x + i\sin\beta x]$)

$$\exp(\alpha x)\cos\beta x,\ x\exp(\alpha x)\cos\beta x,\ \ldots, x^{k-1}\exp(\alpha x)\cos\beta x$$
$$\exp(\alpha x)\sin\beta x,\ x\exp(\alpha x)\sin\beta x,\ \ldots, x^{k-1}\exp(\alpha x)\sin\beta x$$

- tak dojdeme k "reálné" verzi fundamentálního systému.

Příklad. $y'' + y = 0$, $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, kořeny $\pm i$. F.S.=$\{\exp(ix), \exp(-ix)\}$. Reálná verze F.S.: $\{\cos x, \sin x\}$.

Definice. Rovnice

$$\mathscr{K}[y] = q(x)\exp(\lambda_0 x)\,, \tag{4}$$

kde $q(x)$ je polynom, se nazývá rovnice se speciální pravou stranou.
Pravá strana je ten typ funkce, kterým se zabývá Lemma 12.3., a ze kterých umíme sestavit fundamentální systém (Věta 12.10.) Uvidíme, že v této situaci lze řešení uhodnout jako funkci předepsaného tvaru.

Poznámka. Nechť $q_s(x)$, $s = 0, \ldots m$ jsou polynomy, kde stupeň q_s je s. Potom pro libovolný polynom $q(x)$ stupně m existují (jednoznačně určené) konstanty c_s, $s = 0, \ldots m$ takové, že $q(x) = \sum_{s=0}^{m} c_s q_s(x)$.

Věta 16.17. Je dána úloha (4), kde $q(x)$ je polynom stupně m. Nechť $k \geq 0$ vyjadřuje násobnost λ_0 coby kořene charakteristického polynomu ($k = 0$ pokud λ_0 není kořen.)
Potom existuje $r(x)$ polynom stupně m takový, že $y(x) = x^k r(x)\exp(\lambda_0 x)$ je řešení (4).

Příklad. $y'' - y' - 2y = (x+1)\exp(2x)$. $\lambda_0 = 2$ je jednoduchý kořen char. polynomu, stupeň $q(x) = x + 1$ je 1. Hledám řešení ve tvaru $y(x) = xr(x)\exp(2x)$, kde $r(x) = Ax + B$ je polynom stupně 1.
Dosazením do rovnice $A = 1/6$, $B = 2/9$.

Věta 16.17.' Je dána úloha

$$\mathscr{K}[y] = \exp(\alpha x)\big[q_1(x)\cos\beta x + q_2(x)\sin\beta x\big]\,, \tag{5}$$

kde q_1, q_2 jsou polynomy stupně $\leq m$. Nechť $k \geq 0$ vyjadřuje násobnost čísla $\lambda = \alpha + \beta i$ coby kořene charakteristického polynomu.
Potom existují polynomy r_1, r_2 stupně $\leq m$ takové, že

$$y(x) = x^k\exp(\alpha x)[r_1(x)\cos\beta x + r_2(x)\sin\beta x]$$

je řešení (5).

Příklad. $y'' + y' - y = \cos x$. Typ (5), $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, tj. $m = 0$, číslo $\lambda = i$ není kořen char. polynomu.
Hledám řešení ve tvaru $y(x) = A\cos x + B\sin x$, dosazením do rovnice vyjde $A = -2/5$, $B = 1/5$.

Poznámka. Příklad ukazuje, že Větu 16.17.' nelze zjednodušit v tom smyslu, že pokud pravá strana obsahuje jenom cos, pak najdu řešení, obsahující také jenom cos.