11. Aplikace určitého integrálu

Definice. Buď $f : [a, b] \to [0, +\infty)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Definujeme množinu pod grafem funkce f na intervalu $[a, b]$ jako množinu $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in (a, b), y \in (0, f(x))\}$. Plochu pod grafem funkce f na intervalu $[a, b]$ definujeme jako $P(M) = (R) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, má-li pravá strana smysl.

Poznámka. Riemannův integrál udává plochu pod grafem funkce f. Je to přímo definice plochy. Šla by plocha definovat jinak? Vizte 3. semestr nmaf061.

Příklady. Obsah kruhu.

Definice. Buď $a, b \in \mathbb{R}$. Zobrazení $(\gamma_1, \dots, \gamma_k) : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ nazveme křivka, pokud pro všechny $i \in \{1, \dots, k\}$ je $\gamma_i \in C([a, b])$. Řekneme, že křivka $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ je spojitě diferencovatelná, pokud pro všechna $i \in \{1, \dots, k\}$ existuje funkce $\beta_i \in C([a, b])$ tak, že $\gamma_i' = \beta_i$ na (a, b).
Buď $x \in \mathbb{R}^k$, definujeme $|x| = \left(\sum_{i=1}^k x_1^2\right)^{1/2}$.
Buď $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ spojitě diferencovatelná křivka, definujeme délku křivky γ na $[a, b]$ jako

$$\Lambda(\gamma, a, b) = \sup_D \{\sum_{i=1}^n |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})|, D : x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}.$$

Věta 11.1. Buď $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ spojitě diferencovatelná křivka. Pak platí $\Lambda(\gamma, a, b) = (R) \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$.

Příklady. Délka kružnice.

Příklady. Křivka zadaná v polárních souřadnicích vzorcem $r = f(\varphi)$ znamená $\gamma(\varphi) = (f(\varphi)\cos(\varphi), f(\varphi)\sin(\varphi)$ a tedy $|\gamma'(\varphi)| = \sqrt{f'(\varphi)^2 + f(\varphi)^2}$.

Lemma 11.1. (Cauchy-Schwarz) Buď $a, b \in \mathbb{R}^k$. Pak $\sum_{i=1}^k a_i b_i \le |a|\,|b|$.

Lemma 11.2. (Trojúhelníková nerovnost) Buď $a, b \in \mathbb{R}^k$. Pak $|a + b| \le |a| + |b|$, $||a| - |b|| \le |a \pm b|$.

Definice. Je-li $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ definujeme $\int_a^b \gamma(t)\,\mathrm{d}t = (\int_a^b \gamma_1(t)\,\mathrm{d}t, \dots, \int_a^b \gamma_k(t)\,\mathrm{d}t)$.

Lemma 11.3. Buď $f : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ spojité zobrazení. Platí $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Poznámka. Buď $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitá. Definujeme $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 < f^2(z)\}$. Její objem definujeme jako $V(M) = \int_a^b \pi f^2(t)\,\mathrm{d}t$.

10. Řady.

Definice. Nechť $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$. Symbol (1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se nazývá řada. Posloupnost $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kde

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \,,$$

se nazývá posloupnost částečných součtů řady (1). Jestliže existuje (konečná nebo nekonečná) limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, pak číslo s nazveme součtem řady (1). Píšeme

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s \,.$$

Terminologie: pokud $s \in \mathbb{R}$, říkáme, že řada konverguje. V opačném případě diverguje. Divergence řady tedy nastane, pokud buď $s_n \to \pm\infty$ (řada diverguje do $\pm\infty$), nebo $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje (řada osciluje).

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$
② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$
③ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$, $q \in (-1, 1)$
④ $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ osciluje

Věta 12.1.[Nutná podmínka konvergence.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje. Potom $a_k \to 0$.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ diverguje, pokud $|q| \geq 1$.

Věta 12.2.[Aritmetika řad.] 1. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$ konverguje a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,.$$

2. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergují. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ konverguje a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k \,.$$

Lemma 12.1. Nechť řady (1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, (2) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ se liší jen v konečně členech. Potom řada (1) konverguje, právě když řada (2) konverguje.

Lemma 12.2. Nechť $a_k \geq 0$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když má omezené částečné součty.

Věta 12.3. [Srovnávací verze 1.] Jsou dány řady (1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a (2) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, kde a_k, $b_k \geq 0$. Nechť existuje $c > 0$, n_0 takové, že $a_k \leq c\, b_k$ pro $\forall k \geq n_0$. Potom:

(i) pokud řada (2) konverguje, tak řada (1) konverguje;
(ii) pokud řada (1) diverguje, tak řada (2) diverguje.

Věta 12.4. [Podílové kritérium.] Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Nechť $a_k > 0$, nechť $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to q$ pro $k \to \infty$. Potom:
(i) je-li $q < 1$, tak řada konverguje;
(ii) je-li $q > 1$, tak řada diverguje.

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konverguje.
② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^k}$ konverguje.

Poznámka. Pokud $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 1$, nelze obecně nic říci. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje, řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konverguje, pro obě přitom platí $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 1$.

Věta 12.5. [Odmocninové kritérium.] Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Nechť $a_k > 0$, nechť $\sqrt[k]{a_k} \to q$ pro $k \to \infty$. Potom:
(i) je-li $q < 1$, tak řada konverguje;
(ii) je-li $q > 1$, tak řada diverguje.

Věta 12.6. [Integrální kritérium.] Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, kde $a_k \geq 0$. Nechť existuje funkce $f(x)$ spojitá, nezáporná a nerostoucí v $[1, \infty)$ taková, že $a_k = f(k)$ pro $\forall k$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když $\int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$.

Věta 12.7. Ztracená.

Příklad. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ konverguje, právě když $a > 1$.

Věta 12.8. [Raabeho kritérium.] Nechť $a_k > 0$, nechť $k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) \to p$. Potom:
(i) je-li $p > 1$, tak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje;
(ii) je-li $p < 1$, řada diverguje.

Poznámky.
- řada $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$. Protože $a_{k+1}/a_k = (k/(k+1))^2 \to 1$, podílové kritérium neumí rozhodnout; zato Raabe dává $k(a_k/a_{k+1} - 1) \to 2$, tj. řada konverguje. Vidíme, že Raabe je silnější (jemnější) nástroj než podílové kritérium.

- pokud $k(a_k/a_{k+1} - 1) \to 1$, nelze pomocí Raabeho kritéria rozhodnout.

Poznámky k $\mathbb{C}$. Pro $z \in \mathbb{C}$ je $z = x + iy$, kde $i^2 = -1$, x, $y \in \mathbb{R}$. Značíme $x = \operatorname{Re} z$ (reálná část), $y = \operatorname{Im} z$ (imaginární část).
Definujeme $\bar{z} = x - iy$ (číslo komplexně sdružené), $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}$ (absolutní hodnota).
Platí:
(i) $|\operatorname{Re} z|, \operatorname{Im} z \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ pro $\forall z \in \mathbb{C}$
(ii) $|z + w| \leq |z| + |w|$ pro $\forall z, w \in \mathbb{C}$

Konvergence: pro z_n, $z \in \mathbb{C}$ píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, pokud $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$.
Ekvivalentně: $z_n \to z$ platí, právě když $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$.
Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{C}$ konverguje, pokud s_n (posloupnost částečných součtů) má limitu v $\mathbb{C}$.
Ekvivalentně: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$ konvergují. Platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + i \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k \,.$$

Definice. Řekneme, že posloupnost $b_n \in \mathbb{C}$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku (neboli je cauchyovská), jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall m, n \geq n_0\big)\big[|b_m - b_n| < \varepsilon\big] \,. \tag{BC}$$

Věta (Opakování) Nechť $b_n \in \mathbb{C}$. Potom je ekvivalentní:
(1) posloupnost $\{b_n\}$ konverguje, tj. $\exists b \in \mathbb{C}$ tak, že $b_n \to b$;
(2) $\{b_n\}$ je cauchyovská.

Definice. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$. Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku konvergence řady, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \geq n_0\big)\big(\forall p \in \mathbb{N}\big)\Big[\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\Big| < \varepsilon\Big] \,. \tag{BC − r}$$

Pozorování. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ splňuje (BC-r), právě když s_n (posloupnost částečných součtů) splňuje (BC).

Věta 12.9. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když je splněna Bolzano-Cauchyho podmínka konvergence řady (BC-r).

Věta 12.10. [O absolutní konvergenci.] Nechť $a_k \in \mathbb{C}$, nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje. Potom také řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

Definice. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$. Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje, tak řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (která konverguje díky předchozí větě) nazveme absolutně konvergentní.
Pokud $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, avšak $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty$, řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně.

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{2^k}$ konverguje absolutně.
② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konverguje neabsolutně.

Věta 12.11. [Leibnizovo kritérium.] Nechť $b_k \geq 0$, a $b_k \to 0$. Nechť $b_k \geq b_{k+1}$ pro $\forall k \geq n_0$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ konverguje.

Příklad.
• Řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\sqrt{k}}{100+k}$ konverguje.
• Řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{100\sin(k)+k}$ konverguje.

Lemma 12.3. [Abelovo sumační lemma.] Nechť $a_k \in \mathbb{C}$, nechť existuje $K > 0$ takové, že $|\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq K$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Nechť $b_k \geq 0$, $b_k \geq b_{k+1}$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$. Potom $|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leq b_1 K$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Věta 12.12. [Dirichletovo kritérium.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ($a_k \in \mathbb{C}$) má omezené částečné součty. Nechť $b_k \to 0$ a nechť posloupnost $\{b_k\}$ je od jistého indexu monotónní. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje.

Lemma 12.4. Nechť $x \neq 2k\pi$. Potom

$$\sum_{k=0}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}},$$
$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cos \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Důsledek. Nechť $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2k\pi$. Potom řady $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$, $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$ mají omezené částečné součty.

Příklady. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^\alpha}$ diverguje pro $\alpha \leq 0$, konverguje absolutně pro $\alpha > 1$ a konverguje pro $\alpha \in (0, 1]$ podle Dirichletova kriteria. Pro $\alpha \in (0, 1]$ řada nekonverguje.

Věta 12.13. [Abelovo kritérium.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ($a_k \in \mathbb{C}$) konverguje. Nechť posloupnost $\{b_k\} \subset \mathbb{R}$ je omezená, a od jistého indexu monotónní. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje.

Lemma 12.5. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$, nechť $\{c_k\} \subset \mathbb{R}$ je monotónní a $c_k \to c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom je ekvivalentní:
(1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje;
(2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k$ konverguje.

Poznámka. Předpoklad monotonie (Věty 12.8, 12.12, 12.13 a Lemma 12.5) je podstatný a nelze ho vynechat. Nicméně stačí (viz Lemma 12.1), aby monotonie platila až od jistého indexu k.

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1+(-1)^k}}$ diverguje.
② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{arctg} k$ konverguje.

Definice. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme

$$a^+ = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a \leq 0 \end{cases} \qquad a^- = \begin{cases} -a, & a < 0 \\ 0, & a \geq 0 \end{cases}$$

tzv. kladnou resp. zápornou část čísla a.

Poznámka. Platí: $a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$ a $0 \le a^+$, $a^- \le |a|$.

Definice. Nechť a_k, $b_k \in \mathbb{C}$. Nechť existuje $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vzájemně jednoznačné zobrazení takové, že $a_k = b_{\varphi(k)}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ se nazve přerovnání řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Věta 12.15. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ je libovolné přerovnání řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, kde $a_k \in \mathbb{C}$. Nechť buď (i) $a_k \ge 0$, nebo (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně.
Potom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Příklady. Platí: $A := \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}/k > 0$, ale $1 - 1/2 - 1/4 + 1/3 - 1/6 - 1/8 + \cdots = A/2$. Ukažte, že druhá řada je přerovnání první a tedy předpoklad absolutní konvergence v předchozí větě nelze vynechat. Najděte $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Věta 12.16. Nechť $a_k \in \mathbb{R}$, nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně, nechť $s \in \mathbb{R}^*$ je libovolné. Potom existuje přerovnání řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, jehož součet je s.

Poznámka. Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{R}$. Je správná úvaha "nejdříve sečtu všechny kladné členy, pak všechny záporné, pak to složím a mám výsledek"? Formálně jde o rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- .$$

Pro absolutně konvergentní řady to platí. V případě neabsolutně konvergentní řady ne: napravo totiž je $\infty - \infty$.

Věta 12.17. [Cauchyův součin řad.] Nechť řady (1) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ a (2) $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergují absolutně. Pro $k = 0, 1, \ldots$ označme $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$. Potom

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right)$$

a řada $\sum c_k$ konverguje absolutně.

Příklad. Označ $E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Tato řada konverguje absolutně pro každé $z \in \mathbb{C}$ a platí $E(z) \cdot E(w) = E(z + w)$ pro $\forall z, w \in \mathbb{C}$.

11. Mocninné řady.

Definice. Mocninnou řadou rozumíme

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \qquad (1) .$$

kde z_0 je střed řady, c_k jsou koeficienty řady; řadu chápeme jako funkci proměnné z. Předpokládáme c_k, z_0, $z \in \mathbb{C}$. Platí úmluva $a^0 = 1$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$, tj. řada vypadá $c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$.

Poznámky.
- mocninná řada ... zobecněný polynom
- mnoho funkcí se dá napsat jako součet mocninné řady, např. $\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ pro $z \in \mathbb{C}$, $\ln(1+z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{k+1}}{k+1}$ pro $|z| < 1$.

Věta 13.1. [Poloměr konvergence.] Je dána mocninná řada (1). Potom existuje $R \in [0, +\infty]$ takové, že
(i) pokud $|z - z_0| < R$, tak (1) konverguje absolutně;
(ii) pokud $|z - z_0| > R$, tak (1) diverguje.

Příklady. ① $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ... $R = 1$, na kružnici konvergence řada diverguje
② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ ... $R = 1$, na kružnici konvergence řada konverguje absolutně

Terminologie. Číslo R z předchozí věty se nazývá poloměr konvergence řady. Množina $\{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < R\}$ resp. $\{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| = R\}$ se nazývá kruh resp. kružnice konvergence. Zjevně může existovat jen jedno číslo R, které splní obě vlastnosti (i), (ii) - tj. poloměr konvergence je určen jednoznačně.

Věta 13.2. Je dána řada (1). i) Nechť $c_k \neq 0$ a nechť $|\frac{c_{k+1}}{c_k}| \to r$. Potom $R = \dfrac{1}{r}$ (s úmluvou $\dfrac{1}{+\infty} = 0$, $\dfrac{1}{0} = +\infty$) je poloměr konvergence řady.
ii) Nechť $\sqrt[k]{|c_k|} \to r$. Potom $R = \dfrac{1}{r}$ (s úmluvou $\dfrac{1}{+\infty} = 0$, $\dfrac{1}{0} = +\infty$) je poloměr konvergence řady.

Věta 13.3. Buď $\sum_{k=1}^{\infty} a_k w^k \in \mathbb{C}$. Pak pro $t \in (0,1)$ řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (tw)^k \in \mathbb{C}$ konverguje a $\lim_{t \to 1-} \sum_{k=1}^{\infty} a_k (tw)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k w^k$.

Příklady. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/k = \lg(2)$

Poznámka. Hlavním cílem kapitoly je dokázat rovnost:

$$\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \right\}' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1}.$$

Formálně jde o "derivování řady člen po členu", neboli o záměnu $\sum$ a $'$. Řada vpravo je také mocninná řada - můžeme ji přepsat jako

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k (z - z_0)^k, \qquad \tilde{c}_k = (k+1) c_{k+1}.$$

Lemma 13.4. Řady (1) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ a (2) $\sum_{k=1}^{\infty} kc_k(z-z_0)^{k-1}$ mají stejný poloměr konvergence.

Důsledek. Také řady (3) $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k(z-z_0)^{k-2}$, (4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$ mají stejný poloměr konvergence jako (1).
Heslo: formálním derivováním/integrováním člen po členu se nemění poloměr konvergence.

Věta 13.4. Nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ má poloměr konvergence $R>0$. Označme

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k\,, \qquad f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} kc_k(z-z_0)^{k-1}\,.$$

Potom $F'(z)=f(z)$ pro $\forall z\in U$, kde $U=\big\{z\in\mathbb{C};\ |z-z_0|<R\big\}$.

Poznámky.
• funkce $F(z)$, $f(z)$ jsou pro $z\in U$ korektně definovány, neboť dané řady konvergují absolutně (Lemma 11.1.)
• tvrzení platí ve smyslu derivace podle komplexní proměnné, tj.

$$\big(\forall\varepsilon>0\big)\big(\exists\delta>0\big)\Big[0<|h|<\delta,\ h\in\mathbb{C}\implies\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|<\varepsilon\Big]\,,$$

kde $z\in U$ je libovolné.
• speciální případ je i derivace podle reálné proměnné, tj. $F'(x)=f(x)$, pro každé x z intervalu $(-R,R)$, neboli

$$\big(\forall\varepsilon>0\big)\big(\exists\delta>0\big)\Big[0\neq h\in(\delta,\delta)\implies\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|<\varepsilon\Big]\,.$$

Důsledky. (Věty 13.4.)
• funkce $F(z)$ je v množině U nekonečně diferencovatelná a platí $F''(z)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k(z-z_0)^{k-2}$, $F^{(3)}(z)=\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)c_k(z-z_0)^{k-3}$ atd.

• funkce $\Phi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$ je primitivní funkce k $F(z)$ v množině U, tj. $\Phi'(z)=F(z)$ pro $\forall z\in U$.

Příklad. $E(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$. Potom $E'(z)=E(z)$ pro $\forall z\in\mathbb{C}$.

Věta 13.5. Nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ má kladný poloměr konvergence. Označme $F(z)$ její součet. Potom $F^{(k)}(z_0)=k!\,c_k$ pro $\forall l=0,1,\dots$.

Důsledek. Nechť řada (1) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ má kladný poloměr konvergence, a $F(z)$ je její součet. Potom n-tý Taylorův polynom funkce $F(z)$ o středu z_0 je roven n-tému částečnému součtu řady (1).

Věta 13.6. Nechť řady (1) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ a (2) $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k(z-z_0)^k$ mají kladný poloměr konvergence. Označme $F(z)$, $\tilde{F}(z)$ jejich součty. Nechť $F(z) = \tilde{F}(z)$ na jistém $U(z_0)$. Potom $c_k = \tilde{c}_k$ pro $\forall k = 0, 1, \dots$.

Důsledek. Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k = 0$ pro $\forall z$ z nějakého $U(z_0)$. Potom $c_k = 0$ pro $\forall k = 0, 1, \dots$.

Poznámka. Srovnej s příbuznou větou: nechť p, $\tilde{p}$ jsou polynomy, nechť $p(x) = \tilde{p}(x)$ pro nekonečně x. Potom p, $\tilde{p}$ jsou identické, tj. mají stejné koeficienty.

Věta C. Existuje funkce $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, splňující:
1. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ pro $\forall x,\, y \in \mathbb{C}$;
2. $\exp|_{\mathbb{R}}$ je rostoucí a spojitá v $\mathbb{R}$;
3. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h \in \mathbb{C} : |h| \in (0,\delta) \implies |\dfrac{\exp(h)-1}{h} - 1| < \epsilon.$

Funkce exp je těmito vlastnostmi určena jednoznačně.

Poznámka. V důkaze předchozí věty se ukáže, že

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,;$$

podobně platí

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,.$$

Definice. Funkce $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazve reálně analytická v I, jestliže pro každé $x_0 \in I$ existují $c_k \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ na jistém $U(x_0)$.
Funkce $F : I \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se nazve holomorfní v I, jestliže pro každé $z_0 \in I$ existují $c_k \in \mathbb{C}$ tak, že $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ na jistém $U(x_0)$.

Poznámka.
• Pro funkci $F : I \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je ekvivalentní: i) $F \in C^1(I)$, ii) $F \in C^{\infty}(I)$, iii) F je holomorfní v I.
• Existuje $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, že $F \in C^{\infty}(I)$ ale F není reálně analytická. Stačí definovat:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \le 0, \\ \exp(-1/x), & \text{jinak.} \end{cases}$$

Příklad. Funkce $\exp(z)$ je analytická v $\mathbb{C}$, neboť pro každé $z_0 \in \mathbb{C}$ platí $\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp z_0}{k!}(z-z_0)^k$.

14. Metrické prostory.

Definice. Metrickým prostorem rozumíme dvojici (X, ϱ), kde X je množina a funkce $x,\ y \mapsto \varrho(x, y)$ je tzv. metrika, splňující (pro všechna $x,\ y,\ z \in X$):
(i) $\rho(x, y) \geq 0$, přičemž $\rho(x, y) = 0$ právě když $x = y$
(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (symetrie)
(iii) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (trojúhelníková nerovnost)

Poznámky. Metrický prostor (dále m.p.) je obecná matematická struktura, v níž je možné měřit vzdálenost. Díky metrice zavedeme okolí, a tudíž i všechny základní pojmy analýzy (limita, konvergence, spojitost) ve zcela obecné situaci.

Příklady. ① $\mathbb{R}$ s metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$
② na libovolné množině P lze zavést „diskrétní metriku" jako

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Opakování. Vektorový prostor X je množina, jejíž prvky lze sčítat, násobit skalárem (typicky z $\mathbb{R}$), a obsahuje prvek $\mathbf{o}$ (nulový vektor.)

Definice. Normovaný vektorový prostor je dvojice $(X, \|\cdot\|)$, kde X je vektorový prostor, a norma je přiřazení $x \mapsto \|x\|$, splňující:

1. $\|x\| \geq 0$, a $\|x\| = 0$ právě když $x = \mathbf{o}$
2. $\|ax\| = |a|\|x\|$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ($\triangle$-nerovnost)

Příklady. ① Na $\mathbb{R}^n$ lze zavést různé normy: $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$, $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, nejčastější je Eukleidovská norma

$$\|x\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}\,, \qquad \text{kde } \mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \ldots, x_n)\,.$$

② Na prostoru $C([a, b])$ – spojité funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – se obvykle používá „supremová" norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|;\ x \in [a, b]\}\,.$$

Jiná norma na témže prostoru je tzv. L^1 norma:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

Důležitý příklad. Normovaný prostor je metrický prostor, kde metriku definujeme jako $\rho(x,y) = \|x-y\|$.

Definice. (X,ρ) je m.p., $x \in X$, $\delta > 0$. Definujeme kruhové okolí

$$U(x,\delta) = \{y \in X;\ \rho(x,y) < \delta\}$$

a prstencové okolí

$$P(x,\delta) = \{y \in X;\ 0 < \rho(x,y) < \delta\} = U(x,\delta) \setminus \{x\}\,.$$

Množina $G \subset X$ se nazve otevřená, jestliže

$$\big(\forall x \in A\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[U(x,\delta) \subset A\big]\,.$$

Množina $F \subset X$ se nazve uzavřená, jestliže její doplněk $F^c = X \setminus F$ je otevřená množina.

Příklady. V $\mathbb{R}$ s obvyklou metrikou $\rho(x,y) = |x-y|$: (a,b) je otevřená, $[a,b]$ uzavřená. Množina $[0,1)$ není ani otevřená, ani uzavřená. Prázdná množina je zároveň otevřená i zavřená.
Ale v metrickém prostoru $[0,1)$ se stejnou metrikou je množina $[0,1)$ zároveň otevřená i uzavřená, $[0,1/2)$ je otevřená ale není uzavřená.

Věta 14.1 [vlastnosti otevřených množin] (X,ρ) je m.p. Potom
(1) X, $\emptyset$ jsou otevřené množiny
(2) G_α otevřené pro $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ $\implies$ $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} G_\alpha$ je otevřená
(3) $G_1, \ldots, G_N$ jsou otevřené $\implies$ $\bigcap_{n=1}^{N} G_n$ je otevřená

Poznámka. konečný počet množin v bodě (3) je podstatný: množiny $(-1/n, 1/n)$ jsou otevřené, jejich průnik přes $n \in \mathbb{N}$ je však uzavřená množina $\{0\}$.

Věta 14.1' [vlastnosti uzavřených množin] (X,ρ) je m.p. Potom
(1) X, $\emptyset$ jsou uzavřené množiny
(2) F_α uzavřené pro $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ $\implies$ $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha$ je uzavřená
(3) $F_1, \ldots, F_N$ jsou uzavřené $\implies$ $\bigcup_{n=1}^{N} F_n$ je uzavřená

Definice. (X,ρ) je m.p. Uzávěr množiny $A \subset X$ definujeme jako

$$\overline{A} = \bigcap_{F\in\mathcal{A}} F,$$

kde $\mathcal{A} = \{F | F \subset X, A \subset F, F \text{ je uzavřená }\}$.
Vnitřek množiny $A \subset X$ definujeme jako

$$A^\circ = \operatorname{int} A = \bigcup_{G\in\mathcal{A}} G,$$

kde $\mathcal{A} = \{G | G \subset A, G \text{ je otevřená }\}$.
Hranici množiny $A \subset X$ definujeme jako $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ a vnějšek definujeme jako $\operatorname{ext} A = \operatorname{int}(X \setminus A)$.

Poznámka. Uzávěr množiny je nejmenší uzavřená množina, která ji obsahuje. Vnitřek množiny je největší otevřená, která je v ní obsažená.

Příklady. V metrickém prostoru $(\mathbb{R}, \| \cdot \|)$. Je-li $A = (0,1)$, je $\overline{A} = [0,1]$, $A^\circ = (0,1)$, $\partial A = \{0,1\}$, $\operatorname{ext}(A) = \mathbb{R} \setminus [0,1]$.
Je-li $A = \mathbb{Q}$, je $\overline{A} = \mathbb{R}$, $A^\circ = \emptyset$, $\partial A = \mathbb{R}$, $\operatorname{ext}(A) = \emptyset$.

Definice. (X, ρ) je m.p., $\{x_n\} \subset X$ posloupnost bodů. Řekneme, že $\{x_n\}$ má limitu $x_0 \in X$ (neboli konverguje k x_0), jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big[n \geq n_0 \implies x_n \in U(x_0, \varepsilon)\big] .$$

Značíme: $x_n \to x_0$ pro $n \to \infty$, nebo $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$.
Ekvivalentní je požadovat, aby posloupnost (reálných čísel) $\rho(x_n, x_0)$ měla limitu 0.

Věta 14.2 [charakterizace uzavřených množin pomocí posloupností] (X, ρ) je m.p., $F \subset X$. Potom je ekvivalentní:
(1) F je uzavřená
(2) Jsou-li $x_n \in F$ libovolné body, splňující $x_n \to x_0$ pro $n \to \infty$, pak nutně též $x_0 \in F$.
Názorně: z uzavřené množiny nelze vykonvergovat.
. . . . *19.3.2014*

Věta 14.3. (X, ρ) je m.p., $A \subset X$. Potom
i) $\overline{A} = \{x \in X | \forall \delta > 0 : U(x, \delta) \cap A \neq \emptyset\}$
ii) $A^\circ = \{x \in X | \exists \delta > 0 : U(x, \delta) \subset A\}$
iii) $\partial A = \{x \in X | \forall \delta > 0 : U(x, \delta) \cap A \neq \emptyset \text{ a } U(x, \delta) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}$
iv) $\operatorname{ext} A = \{x \in X | \exists \delta > 0 : U(x, \delta) \subset X \setminus A\}$

Věta 14.4. (X, ρ) je m.p., $A \subset X$. Potom
i) $\overline{A} = \{x \in X | \exists \{x_n\} \subset A : x_n \to x\}$
ii) $A^\circ = \{x \in X | \forall \{x_n\} \subset X : x_n \to x \text{ platí } x_n \in A \text{ až na konečně mnoho vyjímek }\}$
iii) $\partial A = \{x \in X | \exists \{x_n\} \subset A : x_n \to x \text{ a } \exists \{y_n\} \subset X \setminus A : y_n \to y\}$
iv) $\operatorname{ext} A = \{x \in X | \forall \{x_n\} \subset X : x_n \to x \text{ platí } x_n \in X \setminus A \text{ až na konečně mnoho vyjímek }\}$

Věta 14.5 [Další vlastnosti] (X, ρ) je m.p., A, $B \subset X$. Potom
(1) $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}, \quad \overline{\emptyset} = \emptyset$
(2) $\overline{A}$ je uzavřená množina

(3) $A \subset \overline{A}$, přičemž $A = \overline{A}$, právě když A je uzavřená
(4) $\partial A = \partial A^c$
(5) ∂A je uzavřená, $\quad \overline{A} = A \cup \partial A$
(6) A je uzavřená $\iff \partial A \subset A$, $\quad A$ je otevřená $\iff \partial A \cap A = \emptyset$
(7) $\operatorname{int} A \subset A$, přičemž rovnost právě když A je otevřená;
(8) $\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A$ (disjunktně)
(9) $X = \operatorname{int} A \cup \partial A \cup \operatorname{ext} A$ (disjunktně)

Definice. (X,ρ), (Y,σ) jsou m.p. Funkce $f : X \to Y$ se nazve spojitá, jestliže

$$\big(\forall x_0 \in X\big)\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in U_X(x_0,\delta) \implies f(x) \in U_Y(f(x_0),\varepsilon)\big]\,.$$

Připomenutí. Pro funkci $f : X \to Y$ definujeme vzor množiny $B \subset Y$

$$f^{-1}(B) = \big\{x \in X;\ f(x) \in B\big\}\,;$$

– nemá co do činění s inverzním zobrazením, f nemusí být prostá.

Věta 14.6 (X,ρ), (Y,σ) jsou m.p., $f : X \to Y$. Potom je ekvivalentní:
(1) f je spojitá
(2) pro každou $G \subset Y$ otevřenou je $f^{-1}(G) \subset X$ otevřená
(3) pro každou $F \subset Y$ uzavřenou je $f^{-1}(F) \subset X$ uzavřená

Věta 14.7 [Heineho charakterizace spojitosti.] (X,ρ), (Y,σ) jsou m.p., $f : X \to Y$. Potom je ekvivalentní:
(1) f je spojitá
(2) pro každý bod $x_0 \in X$ a pro libovolnou posloupnost $\{x_n\} \subset X$, splňující $x_n \to x_0$ pro $n \to \infty$, platí $f(x_n) \to f(x_0)$ pro $n \to \infty$

Věta 14.8 [Spojitost superpozice, součtu atd.]
(1) Nechť (X,ρ), (Y,σ), (Z,τ) jsou metrické prostory, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ jsou spojité. Potom $g \circ f : X \to Z$ je spojité.
(2) Je-li (X,ρ) m.p., $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ spojité funkce, potom i $f+g$, $f-g$, $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ jsou spojité. Je-li navíc $g(x) \neq 0$ pro $\forall x \in X$, je také $f/g : X \to \mathbb{R}$ spojitá.

Definice. (X,ρ), (Y,σ) jsou m.p., $f : X \to Y$ funkce. Řekneme, že $b \in Y$ je limita funkce f v bodě $x_0 \in X$, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in P_X(x_0,\delta) \implies f(x) \in U_Y(b,\varepsilon)\big]\,.$$

Značíme $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, nebo $f(x) \to b$ pro $x \to x_0$.

Poznámka. Vidíme, že hodnota $f(x_0)$ nehraje v definici žádnou roli, fakticky zde f nemusí být ani definována.

Věta 14.9 [Heineho charakterizace limity] (X, ρ), (Y, σ) jsou m.p., $f : X \to Y$ daná funkce, $x_0 \in X$, $b \in Y$. Potom je ekvivalentní:
(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$
(2) pro libovolnou posloupnost $\{x_n\} \subset X$, splňující $x_n \to x_0$ pro $n \to \infty$, a zároveň $x_n \neq x_0$ pro $\forall n$, platí $f(x_n) \to b$ pro $n \to \infty$.

Definice. (X, ρ), (Y, σ) jsou m.p., $f : X \to Y$ funkce. Řekneme, že f je spojitá v bodě $x_0 \in X$, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in U_X(x_0, \delta) \implies f(x) \in U_Y(f(x_0), \varepsilon)\big].$$

Poznámky.

- $f : X \to Y$ je spojitá, právě když je spojitá v každém $x_0 \in X$
- $f : X \to Y$ je spojitá v bodě x_0, právě když $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

.... *20.3.2014*

Definice. Nechť (X, ρ) je m.p., $\{x_n\} \subset X$ posloupnost bodů. Řekneme, že $\{y_n\}$ je podposloupnost (též vybraná posloupnost), jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $y_n = x_{k_n}$ pro $\forall n$.

Definice. Nechť (X, ρ) je m.p. Množina $A \subset X$ se nazve kompaktní, jestliže pro libovolnou posloupnost $\{x_n\} \subset A$ existuje podposloupnost $\{x_{k_n}\}$ a bod $x_0 \in A$ tak, že $x_{k_n} \to x_0$ pro $n \to \infty$.

Příklady.
• V m.p. $((0,1), |\cdot|)$ nelze z $\{1/k\}$ vybrat konvergentní podposloupnost. Pokud by existovala, konvergovala by k $0 \notin (0,1)$. Tedy $(0,1)$ není kompaktní.
• V metrickém prostoru $(C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$ není $\overline{U(0,1)}$ kompaktní. Volíme-li $f_k(x) = |\sin(\pi/x)|\chi_{(1/(k+1),1/k)}$, je $||f_k - f_j||_\infty = \delta_{jk}$ a tedy z posloupnosti $\{f_k\}$ nelze vybrat konvergentní podposloupnost. Omezená a uzavřená množina $\overline{U(0,1)}$ není kompaktní.

Poznámky. (X, ρ) je m.p., $\{x_n\}$ posloupnost bodů.

- x_0 se nazve hromadný bod posloupnosti $\{x_n\}$, jestliže existuje podposloupnost $\{x_{k_n}\}$ taková, že $x_{k_n} \to x_0$ pro $n \to \infty$
- ekvivalentně: x_0 je hromadný bod posloupnosti $\{x_n\}$, právě když

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big[x_n \in U(x_0, \varepsilon) \quad \text{platí pro někonečně indexů } n\ \big].$$

- ekvivalentní definice limity: $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, právě když

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big[x_n \in U(x_0,\varepsilon) \quad \text{platí pro všechna } n \text{ až na konečně výjimek}\big]\,.$$

- jestliže $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, pak x_0 je hromadný bod této posloupnosti, a je to jediný její hromadný bod.

- ekvivalentní definice kompaktnosti: A je kompaktní, právě když libovolná posloupnost $x_n \in A$ má alespoň jeden hromadný bod, který je prvkem A.

Definice. (X,ρ) je m.p. Množina $A \subset X$ se nazve omezená, jestliže

$$\big(\exists x_0 \in X\big)\big(\exists K > 0\big)\big[A \subset U(x_0,K)\big]\,.$$

Věta 14.10 Nechť (X,ρ) je m.p. a $A \subset X$ je kompaktní. Potom
(1) A je omezená a uzavřená
(2) Je-li $B \subset A$, a B je uzavřená, pak B je též kompaktní.

Poznámka. Obrácená implikace k (1) neplatí. Viz $\overline{U}(0,1)$ v $(C([0,1]),||\cdot||_\infty)$.

Věta 14.11 Nechť (X,ρ), (Y,σ) jsou m.p., nechť X je kompaktní. Potom
(1) Je-li $f: X \to Y$ spojité, potom $f(X)$ je kompaktní.
(2) Je-li $f: X \to \mathbb{R}$ spojité, potom f je v X omezená, a nabývá zde maxima a minima.

Připomenutí. Funkce $f: X \to \mathbb{R}$ se nazývá omezená, jestliže

$$\big(\exists K > 0\big)\big(\forall x \in X\big)\big[|f(x)| \le K\big]\,,$$

což je totéž, jako že množina

$$f(X) = \big\{f(x);\ x \in X\big\}$$

je omezená.

Definice. Nechť (X,ρ) je m.p., Řekneme, že posloupnost $\{x_n\} \subset X$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku (neboli je cauchyovská), jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big[m,\, n \ge n_0 \implies \varrho(x_n,x_m) < \varepsilon\ \big]\,.$$

Pozorování. Jestliže posloupnost $\{x_n\}$ má limitu, pak je cauchyovská.

Definice. Metrický prostor (X,ρ) se nazve úplný, jestliže libovolná cauchyovská posloupnost bodů z X má zde také limitu.

Příklady. Metrický prostor $((0,1), |\cdot|)$ není úplný. Uvažte posloupnost $\{1/k\}$.

Definice. Nechť (X,ρ), (Y,σ) jsou metrické prostory. Funkce $f : X \to Y$ se nazve lipschitzovská, jestliže existuje $L \geq 0$ tak, že

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq L\varrho(x,y) \qquad \forall x, y \in X\,.$$

Je zjevné, že lipschitzovská funkce je spojitá. Funkce, která lipschitzovská s konstantou $L < 1$, se nazývá kontrakce.

Věta 14.12 [Banachova věta o pevném bodě.] Nechť (X,ρ) je úplný neprázdný metrický prostor, nechť $f : X \to X$ je kontrakce, tj. lipschitzovská s $L \in [0,1)$. Potom existuje jediné $x_0 \in X$ tak, že $f(x_0) = x_0$.
Navíc platí: Pokud $x_1 \in X$, $x_k = f(x_{k-1})$, je $\rho(x_0, x_k) \leq L^k \rho(x_0, x_1)/(1-L)$.

Poznámka. Zbytek kapitoly je věnován speciálně situaci v $\mathbb{R}^N$. To, jak známo, je normovaný vektorový prostor, s eukleidovskou normou

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

kde x_i jsou jednotlivé složky vektoru $\boldsymbol{x}$. Prvky $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ jsou sloupcové vektory $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_N)^T$. Speciálně, $\mathbb{R}^N$ považujeme též za metrický prostor s metrikou $\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$.

Opakování. Prostor se skalárním součinem je dvojice $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, kde X je vektorový prostor, a skalární součin je přiřazení x, $y \mapsto \langle x, y \rangle$, splňující:

1. přiřazení $x \mapsto \langle x, y \rangle$ je lineární (při y pevném)
2. $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$, a $\langle x, x \rangle = 0$ právě když $x = 0$.

Na prostoru se skalárním součinem lze definovat normu předpisem

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}\,. \tag{1}$$

Eukleidovská norma v $\mathbb{R}^n$ je vytvořena pomocí skalárního součinu

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,.$$

Fakt, že toto (1) je vždy norma zejména, že splňuje trojúhelníkovou nerovnost), plyne z obecně platící tzv. Cauchy-Schwartzovy nerovnosti:

Věta 14.13 [Cauchy-Schwartz] Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je prostor se skalárním součin, a $\|\cdot\|$ definujeme pomocí (1). Potom

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

pro libovolné prvky x, $y \in X$.

Lemma 14.1 Posloupnost bodů $\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^N$ konverguje k $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^N$, právě když každá složka vektoru $\boldsymbol{x}_n$ konverguje k odpovídající složce vektoru $\boldsymbol{x}_0$.

Věta 14.14 Množina $A \subset \mathbb{R}^N$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.

Poznámka. Implikace kompaktní $\Longrightarrow$ omezená a uzavřená platí obecně výše. Obrácená implikace obecně neplatí; fakticky vzato platí pouze v konečnědimenzionálních prostorech (tj. v $\mathbb{R}^N$).

Věta 14.15 Prostor $\mathbb{R}^N$ je úplný.

Poznámka. Výše uvedené vlastnosti má také množina komplexních čísel $\mathbb{C}$, kterou přirozeně ztotožňujeme s $\mathbb{R}^2$.

Definice. Normovaný vektorový prostor, který je úplný vzhledem k metrice, určené jeho normou, se nazývá Banachův prostor.
Prostor se skalárním součinem, který je úplný vzhledem k metrice, určené normou, kterážto je určena skalárním součinem, se nazývá Hilbertův prostor.

15. Funkce více proměnných.

V této kapitole studujeme funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, které lze chápat také jako M-tice funkcí

$$\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_M)^T$$

kde každá f_j má N proměnných:

$$f_j = f_j(x_1, \ldots, x_N)\,.$$

Vektory značíme tučně $\boldsymbol{x}$, jejich složky x_i. V $\mathbb{R}^N$ uvažujeme implicitně eukleidovskou normu

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}\,,$$

a tudíž je to metrický prostor s metrikou $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$.
Z předchozí kapitoly víme, co znamená okolí v $\mathbb{R}^N$, a tedy limita, spojitost takových funkcí. Nyní se zaměříme především na jejich diferencovatelnost.

Příklady. ① Každá lineární funkce $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ je spojitá, ztotožňujeme ji přirozeně s maticí $\mathbb{R}^{M\times N}$ ② Každý polynom $p(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce

Definice. Řekneme, že $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ má limitu $a \in \mathbb{R}^*$ pro $\boldsymbol{x} \to \infty$, pokud

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N : \|\boldsymbol{x}\| > \frac{1}{\delta} \implies f(\boldsymbol{x}) \in U(a, \epsilon).$$

Značíme $\lim_{\|\boldsymbol{x}\| \to \infty} f(\boldsymbol{x}) = a$.

Definice. Řekneme, že $f : M \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ má v $\boldsymbol{a} \in M$ vzhledem k M globální maximum, ostré globální maximum, lokální maximum, ostré lokální maximum, pokud pro každé $\boldsymbol{x} \in M \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ je $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a})$, pro každé $\boldsymbol{x} \in M \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ je $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{a})$, existuje $U(\boldsymbol{a})$ tak, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{a}) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ je $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a})$, existuje $U(\boldsymbol{a})$ tak, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{a}) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ je $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{a})$. Podobně pro minima. Souhrně říkáme, že funkce f nabývá globální extrémy, lokální extrémy, extrémy.

Věta 15.1. 1) Nechť $M \subset \mathbb{R}^N$ je omezená a uzavřená, $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá na M. Potom f nabývá v M globální maximum i globální minimum na M.
2) Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spojitá, $\lim_{\|\boldsymbol{x}\| \to \infty} f(\boldsymbol{x}) = +\infty$. Potom f nabývá na $\mathbb{R}^N$ globálního minima. Podobně pro maximum.
3) Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spojitá, $\lim_{\|\boldsymbol{x}\| \to \infty} f(\boldsymbol{x}) = 0$ a existuje bod $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ takový, že $f(\boldsymbol{x}_0) > 0$. Potom f nabývá na $\mathbb{R}^N$ globálního maxima.

Definice. Je dána $f : U(\boldsymbol{a}) \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$. Parciální derivací f v bodě $\boldsymbol{a}$ podle x_i rozumíme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^i) - f(\boldsymbol{a}) \right],$$

kde $\boldsymbol{e}^i$ je vektor s 1 na i-té pozici a nulami jinde. Obecněji, definujeme derivaci ve směru $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^N$ jako

$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a}) \right].$$

Poznámky.
• parciální derivace: derivuje podle jedné proměnné, ostatní jsou pevné – v podstatě situace minulého semestru
• parciální derivace je speciální případ derivace ve směru: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = D_{\boldsymbol{e}^i} f$

Věta 15.2. (Nutná podmínka extrému) Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ má v $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$ lokální extrém, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{o}\}$. Pak buď $D_{\boldsymbol{w}} f(\boldsymbol{a}) = 0$ nebo neexistuje. Speciálně jsou parciální derivace nulové v $\boldsymbol{a}$ nebo neexistují.

Příklady. Funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$ je spojitá na $\mathbb{R}^2$ a $\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x, y) = +\infty$. Podle Věty 15.1 tedy funkce f nabývá globálního minima. Podle Věty

15.2 je jediný bod, ve kterém může být extrém, bod $(x,y)=(-1,0)$. Musí to tedy být bod globálního minima. Tedy $\min_{\mathbb{R}^2} f=-1$ a $\max_{\mathbb{R}^2} f=+\infty$. Funkce $g(t)=f(t,0)$ je spojitá na $[-1,+\infty)$ a má tam tedy Darbouxovu vlastnost. Z toho plyne, že $g([-1,+\infty))=[-1,+\infty)$. Konečně $H(f)=[-1,+\infty)$.

Poznámka. Parciální derivace je nedostatečný pojem: existuje funkce, jež má parciální derivace nulové, a přesto je (v daném bodě) nespojitá. Existuje dokonce funkce, která má všechny směrové derivace nulové, a pořád je nespojitá. Stačí uvážit funkci $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definovanou jako $f=\chi_M$ pro $M=\{(x,y)\subset\mathbb{R}^2; y>0, x^2+(y-1/2)^2=1/4\}$ v nule. Potřebujeme lepší (silnější) pojem derivace.

Definice. Je dána $\boldsymbol{f}:U(\boldsymbol{a})\to\mathbb{R}^M$, $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^N$. Totálním diferenciálem funkce $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{a}$ rozumíme lineární zobrazení $L:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^M$, splňující

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{o}}\frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|}\big[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})-L(\boldsymbol{h})\big]=\mathbf{o}\,.$$

Totální diferenciál značíme $d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$.

Poznámky.
• ekvivalentně:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})+L(\boldsymbol{h})+\boldsymbol{z}(\boldsymbol{h})\,,$$

kde $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{h})=o(\|\boldsymbol{h}\|)$ pro $\boldsymbol{h}\to\mathbf{o}$, tedy $\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{o}}\|\boldsymbol{z}(\boldsymbol{h})\|/\|\boldsymbol{h}\|=0$.
• je-li $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, pak $f'(a)=A\in\mathbb{R}$, právě když

$$\lim_{t\to0}\frac{1}{|t|}\big[f(a+t)-f(a)-At\big]=0\,.$$

Věta 15.3 Nechť $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^M$ má v bodě $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^N$ totální diferenciál. Potom
(1) $\boldsymbol{f}$ je v bodě $\boldsymbol{a}$ spojitá
(2) pro každé $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^N$ existuje směrová derivace $\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a})$ a rovná se $[d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})](\boldsymbol{v})$

Definice. Gradientem funkce $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^M$ rozumíme matici $M\times N$

$$\nabla\boldsymbol{f}=\Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big)_{j=1,\dots M;\ i=1,\dots N}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}\end{pmatrix}.$$

Důsledek. Jestliže $d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ existuje, je určen jednoznačně, a je reprezentován maticí $\nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, přesněji vzato zobrazením

$$\boldsymbol{h} \mapsto [\nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})]\boldsymbol{h}\,. \tag{2}$$

Věta 15.4 Nechť $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$. Potom
(1) Jsou-li $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}$ omezené na nějakém $U(\boldsymbol{a}, \delta)$, je $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{a}$ spojitá
(2) Jsou-li $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}$ spojité v bodě $\boldsymbol{a}$, má zde $\boldsymbol{f}$ totální diferenciál
. . . . *3.4.2014*

Věta 15.5 (1) Nechť $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ mají totální diferenciál v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$. Potom $f + g$ má totální diferenciál v bodě $\boldsymbol{a}$ a platí

$$d(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{a}) = d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + d\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})\,.$$

(2) Nechť $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ a $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^K$ mají totální diferenciál v bodech $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$, respektive $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$. Potom složené zobrazení $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ má totální diferenciál v bodě $\boldsymbol{a}$ a platí

$$d(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{a}) = d\boldsymbol{g}(\boldsymbol{b}) \circ d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\,.$$

Důsledek. Za předpokladu předchozí věty platí

$$\nabla(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{a}) = [\nabla\boldsymbol{g}(\boldsymbol{b})][\nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})]\,,$$

(maticový součin), po složkách zapsáno

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\big(g_l(\boldsymbol{f})\big)(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial g_l}{\partial y_i}(\boldsymbol{b})\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})\,.$$

(tzv. „řetízkové pravidlo“).

Definice. Pro $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^N$ definujeme otevřenou úsečku

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \big\{\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a});\ t \in (0, 1)\big\}$$

a uzavřenou úsečku

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \big\{\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a});\ t \in [0, 1]\big\}\,.$$

Věta 15.6 [O střední hodnotě.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená, nechť $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je třídy C^1. Potom pro libovolné $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \Omega$ takové, že $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subset \Omega$ existuje $\boldsymbol{c} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ takové, že

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \langle \nabla f(\boldsymbol{c}), \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\rangle\,.$$

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená. Potom $\boldsymbol{f} \in C(\Omega)$ značí, že $\boldsymbol{f}$ je spojitá (což je právě když všechny složky f_i jsou spojité). Dále

$$C^1(\Omega) = \{\boldsymbol{f} \in C(\Omega); \forall j \in \{1, \dots, N\} : \partial_j \boldsymbol{f} \in C(\Omega)\},$$
$$C^k(\Omega) = \{\boldsymbol{f} \in C(\Omega); \forall j \in \{1, \dots, N\} : \partial_j \boldsymbol{f} \in C^{k-1}(\Omega)\}.$$

Definice. Parciální derivace vyšších řádů definuji takto:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right),$$

obecně

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}, \qquad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, N\}$$

vznikne postupnou aplikací $\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}, \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}$.
Funkce třídy C^k, $\boldsymbol{f} \in C^k(\Omega)$, je taková, že všechny parciální derivace až do řádu k jsou spojité.
Proč nejraději funkce na otevřených množinách? Každý bod obsahuje i okolí – není problém počítat parciální derivace atd.

Poznámka. Závisí na pořadí parciálních derivací? Obecně ano: definujme

$$f(x,y) = \begin{cases} xy, & |y| > |x|, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$, zatímco $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$. Je-li však funkce dost hladká, na pořadí nezáleží – viz následující věta.

Věta 15.7 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je třídy C^2 na nějakém $U(\boldsymbol{a})$. Potom pro $j, k \in \{1, \dots, N\}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\boldsymbol{a}).$$

Důsledek. Je-li funkce třídy C^k, pak hodnoty libovolné parciální derivace stupně (nejvýše) k nezávisí na pořadí derivování.

Definice. Buď $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$ a $\boldsymbol{f} \in C^k(U(\boldsymbol{a}))$. Definujeme totální diferenciál řádu k fce $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{a}$ jako zobrazení $d^k f(\boldsymbol{a}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ předpisem

$$d^k f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = \sum_{j_1=1}^{N} \cdots \sum_{j_k=1}^{N} \frac{\partial^k}{\partial_{x_{j_1}} \dots \partial_{x_{j_k}}} f(\boldsymbol{a}) h_{j_1} \dots h_{j_k}.$$

Poznámka. Zřejmě $df(\boldsymbol{a}) = d^1 f(\boldsymbol{a})$.

Příklady. Pro funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$ platí: $df(a, b)(k, l) = 2(ak + bl)$, $d^2 f(a, b)(k, l) = 2(k^2 + l^2)$.

Definice. Buď $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$, $f \in C^2(U(\boldsymbol{a}))$. Hessovu matici funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ definueme předpisem

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(\boldsymbol{a}) & \cdot\ \cdot\ \cdot & \partial_1 \partial_N f(\boldsymbol{a}) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \partial_1 \partial_N f(\boldsymbol{a}) & \cdot\ \cdot\ \cdot & \partial_N^2 f(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

Poznámka. Pro funkci $f \in C^2(U(\boldsymbol{a}))$ je funkce $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ symetrická matice. Z definice platí: $d^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = h^T \nabla^2 f(\boldsymbol{a}) h$.

Opakování. Taylorův rozvoj funkce $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ –

$$\varphi(a + h) = \varphi(a) + \varphi'(a)h + \frac{1}{2!}\varphi''(a)t^2 + R_3(h)\,,$$

kde $R_3(h) = \frac{1}{3!}\varphi'''(\theta)h^3$ pro vhodné θ ležící mezi a a $a + h$.

Věta 15.8 [Taylorův rozvoj v $\mathbb{R}^N$] Nechť $f : U(\boldsymbol{a}) \to \mathbb{R}$, $f \in C^k(U(\boldsymbol{a}))$, kde $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$. Potom pro každé $\boldsymbol{h} \in U(\boldsymbol{a})$ existuje $\boldsymbol{\theta} \in (\boldsymbol{a}; \boldsymbol{a} + \boldsymbol{h})$ takové, že

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) + \frac{1}{2!}d^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}d^{k-1} f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) + R_k(\boldsymbol{h})\,,$$

kde

$$R_k(\boldsymbol{h}) = \frac{1}{k!}d^k f(\theta)(\boldsymbol{h})\,.$$

.... *9.4.2014*

Opakování. Nechť $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ je symetrická matice. Kvadratickou formou, určenou touto maticí, rozumíme funkci $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definovanou jako

$$\varphi(\boldsymbol{h}) = \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij} h_i h_j = \langle A\boldsymbol{h}^T, \boldsymbol{h} \rangle\,.$$

Forma se nazve pozitivně definitní, jestliže existuje $c_1 > 0$ tak, že $\varphi(\boldsymbol{h}) \geq c_1 \|\boldsymbol{h}\|^2$ pro každé $\boldsymbol{h}$. To nastává právě tehdy, když vlastní čísla A jsou všechna kladná.

Forma se nazve negativně definitní, jestliže existuje $c_2 > 0$ tak, že $\varphi(\boldsymbol{h}) \leq -c_2\|\boldsymbol{h}\|^2$ pro každé $\boldsymbol{h}$. To nastává právě tehdy, když vlastní čísla A jsou všechna záporná.
Forma se nazve indefinitní, jestliže existují $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ tak, že $\varphi(\boldsymbol{v}) > 0$ a $\varphi(\boldsymbol{w}) > 0$. To nastává právě tehdy, A má kladná i záporná vlastní čísla.

Opakování. Z algebry víme, že symetrická matice má pouze reálná vlastní čísla, dále že odpovídající vlastní vektory tvoří ortonormální bázi, a matice je podobná diagonální matici.
K určení definitnosti matice není vždy nutné počítat charakteristický polynom. Jestliže $\{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$ je seznam všech vlastních čísel (vícenásobná píšeme opakovaně), pak platí:

$$\begin{aligned} \det A &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n, \\ \operatorname{tr} A &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n. \end{aligned}$$

$\operatorname{tr} A$ je stopa matice, definovaná jakožto součet diagonálních prvků. Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tedy

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= \det A = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= \operatorname{tr} A = 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice plyne, že vlastní čísla jsou všechna nenulová, ze druhé pak, že aspoň jedno je kladné a aspoň jedno záporné, tedy matice je indefinitní.
K určení definitnosti lze použít také Silvestrovo pravidlo. Označme Δ_k, $k = 1, \dots N$, determinanty matic $\left\{A_{ij}\right\}_{i,j=1}^{k}$. Potom A je pozitivně definitní, právě když $\Delta_k > 0$ pro každé k, a je negativně definitní, právě když $(-1)^{k-1}\Delta_k > 0$ pro každé k.

Věta 15.9 Nechť $f : U(\boldsymbol{a}) \to \mathbb{R}$ je třídy C^3, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$. Nechť $\nabla f(\boldsymbol{a}) = 0$, a označme $\varphi(\boldsymbol{h})$ kvadratickou formu, určenou Hessovou maticí f v bodě $\boldsymbol{a}$, tj.

$$\varphi(\boldsymbol{h}) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) h_i h_j \,.$$

Potom platí:

1. je-li $\varphi(\boldsymbol{h})$ pozitivně definitní, je $\boldsymbol{a}$ lokální minimum

2. je-li $\varphi(\boldsymbol{h})$ negativně definitní, je $\boldsymbol{a}$ lokální maximum

3. je-li $\varphi(\boldsymbol{h})$ indefinitní, není $\boldsymbol{a}$ (ani lokální) extrém

Definice. Třetí případ předchozí věty nazýváme ,,sedlový bod".

Poznámka. Předchozí věta nepokrývá všechny možné případy. Je-li příslušná forma pouze semidefinitní, tj. například nezáporná, ale někde nulová, obecně nelze rozhodnout.
Srovnej případ, kdy $f'(a) = f''(a) = 0$. Potom a může a nemusí být lokální extrém (viz $f = t^3$ resp. t^4 v bodě $a = 0$.)

Poznámka. Pro vyšetřování globálních extrémů funkce $f : M \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ využíváme následující věty:

1. Existence maxima a minima f je zaručena Větou 15.1 (jsou-li splněny její předpoklady).

2. Body $\boldsymbol{x} \in M^\circ$, ve kterých by f mohla nabývat extrému, určíme pomocí Věty 15.2.

3. Body $\boldsymbol{x} \in \partial M$, ve kterých by f mohla nabývat extrému, určíme následovně. Množinu ∂M parametrizujeme a tím převedeme problém na předchozí bod. Lze hranici vždy parametrizovat? (viz Věta 15.10)

Příklady. Buď $M, N \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{M\times M}$, $B \in \mathbb{R}^{M\times N}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^M$, . Rovnice $B\boldsymbol{y} + A\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$ má pro každé $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^N$ řešení $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^M$ právě tehdy, když je matice A regulární, tj. $\det(A) \neq 0$. Označíme-li $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = B\boldsymbol{y} + A\boldsymbol{x}$, platí $\nabla_{\boldsymbol{y}} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = A$ a nutná a postačující podmínka pro řešitelnost rovnice $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{o}$ je $\det(\nabla_{\boldsymbol{y}} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \neq 0$.

Věta 15.10 [O implicitní funkci – obecná verze] Nechť $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \mathbb{R}^{N+M} \to \mathbb{R}^M$; podrobněji, jde o funkce

$$F_j(x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_M), \qquad j = 1, \ldots M.$$

Nechť $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^{N+M}$, po složkách

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_M).$$

Nechť platí:

- $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \mathbf{o}$

- F_j jsou C^1 na okolí $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

- (klíčový předpoklad) matice

$$\nabla_{\boldsymbol{y}} F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left\{ \frac{\partial F_j}{\partial y_i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\}_{i,j=1,\dots M}$$

  je regulární v bodě $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

Potom existují δ, $\Delta > 0$ a C^1 funkce

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x}) : U(\boldsymbol{a},\delta) \to U(\boldsymbol{b},\Delta)$$

(tedy funkce z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}^M$) tak, že pro každé $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in U(\boldsymbol{a},\delta) \times U(\boldsymbol{b},\Delta)$ platí

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbf{o} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x}).$$

Navíc pro $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{a},\delta)$ platí,

$$\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = -[\nabla_y F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x}))]^{-1} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x})).$$

Navíc, je-li $\boldsymbol{F}$ třídy C^k, je též $\boldsymbol{Y}$ třídy C^k (na příslušných okolích).

Poznámka. Věta říká, že množina

$$\Gamma = \big\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{N+M};\ F_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0\big\}$$

lze lokálně v okolí bodu $\boldsymbol{a}$ popsat jako graf funkce $\boldsymbol{Y} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ (na jistém okolí bodu $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.
Názorně: v původně $N + M$-dimenzionálním prostoru nám M nezávislých podmínek (rovnice $F_j = 0$) určuje N-dimenzionální objekt. Nezávislost těchto rovnic je zaručena třetím, klíčovým předpokladem.

....17.4.2014

Definice. Definujme funkci $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{M\times M} \to [0,+\infty)$ předpisem

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|; x \in \mathbb{R}^M, \|x\| = 1\},$$

pro $A \in \mathbb{R}^M$.

Lemma 15.1. Funkce definovaná v předešlé definici je norma na $\mathbb{R}^M$.

Poznámka. Norma z předchozího lemmatu má následující vlastnost

$$\forall x \in \mathbb{R}^M, \forall A \in \mathbb{R}^{M\times M} : \|Ax\| \le \|A\|\|x\|.$$

Poznámka. Na $\mathbb{R}^{M\times M}$ lze definovat i jiné normy. Například

$$\|A\|_2 = (\sum_{i,j=1}^M a_{ij}^2)^{1/2}, \quad \|A\|_1 = \sum_{i,j=1}^M |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \max_{i,j\in\{1,\dots,M\}} |a_{ij}|.$$

Lemma 15.2. Je-li X vektorový prostor konečné dimenze, jsou na něm všechny normy ekvivalentní. Přesněji, jsou-li $\|\cdot\|$ a $|||\cdot|||$ normy na X, existuje $C > 0$ tak, že

$$\forall x \in X : \frac{1}{C}\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\|.$$

Důsledek. Pokud je na konečně rozměrném vektorovém prostoru X metrika definovaná normou, jsou následující pojmy nezávislé na tom, jakou normu zvolíme: otevřené množiny, limity posloupností, spojitost a limita funkce.

Poznámka. (Cramerovo pravidlo) Buď A invertovatelná matice, pak její inverze má složky

$$a_{ij}^{-1} = \frac{\det A_{ij}}{\det A},$$

kde matice A_{ij} vznikne z A nahrazením i-tého sloupce vektorem e_j.

Lemma 15.3. Buď $\Phi : \mathbb{R}^{M\times M} \to \mathbb{R}^{M\times M}$ definováno předpisem $\Phi(A) = A^{-1}$ (inverzní matice). Pak definiční obor $D(\Phi)$ je otevřená množina a $\Phi \in C^\infty(D(\Phi))$. Navíc $d\Phi(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}$.

Věta 15.11 [Vázané extrémy – obecná verze] Nechť f, $g_j : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots k$, kde $k < N$. Nechť $\boldsymbol{a} \in \Gamma$, kde

$$\Gamma = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N;\ g_j(\boldsymbol{x}) = 0,\ j = 1, \dots k\right\}.$$

Předpokládejme, že f a g_j jsou třídy C^1 na okolí $\boldsymbol{a}$, a že matice

$$\left\{\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})\right\}$$

má maximální hodnost, tj. k.
Potom nutnou podmínkou toho, že $\boldsymbol{a}$ je lokální extrém f vůči Γ, je existence čísel $\lambda_j \in \mathbb{R}$ takových, že

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \nabla g(\boldsymbol{a}). \tag{3}$$

Poznámky. Čísla λ_j se nazývájí Lagrangeovy multiplikátory. Dle předchozí věty jsou z extrému podezřelé body, kde

- f, g_j nejsou hladké
- $\nabla g(\boldsymbol{a}) = \mathbf{o}$, což odpovídá situaci, kde množina Γ (obecně $(N-k)$-dimenzionální hladká plocha) může degenerovat

- konečně body, kde platí (3).

Příklady. a) Buď $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ a $g_2(x,y,z) = x + y$. Pak $g_1, g_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\boldsymbol{a} := (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0) \in M$ a

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} (\boldsymbol{a}) = 2\sqrt{2} \neq 0.$$

Podle Věty 15.10 tedy lze množinu M na okolí bodu popsat jako graf funkce

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : U(0,\delta) \to U(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \Delta)$$

pro vhodná $\delta, \Delta > 0$. Zřejmě $x(0) = 1/\sqrt{2}$, $y(0) = -1/\sqrt{2}$. Dosadíme-li fce x a y do rovnic $g_1 = 0$, $g_2 = 0$ můžeme získaný výraz derivovat a dostáváme postupně pro $z \in U(0,\delta)$

$$2x(z)x'(z) + 2y(z)y'(z) + 2z = 0x'(z) + y'(z) = 0.$$

Po dosazení bodu $\boldsymbol{a}$ spočítáme $x'(0) = 0$ a $y'(0) = 0$. Derivujeme-li ještě jednou spočítáme po dosazení bodu $\boldsymbol{a}$, že $x''(0) = -1/\sqrt{2}$ a $y''(0) = 1/\sqrt{2}$.
b) Hledejme nyní extrémy $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ na M z předchozího příkladu. Protože f je spojitá a M kompaktní (omezená a uzavřená), nabývá f na M maxima i minima. K nalezení těchto bodů použijeme Větu 15.11. Víme již, že $g_1, g_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Spočtěme

$$\begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řádky jsou lineárně závislé pouze v bodech $(x,x,0)$ pro $x \in \mathbb{R}$, ale tyto body neleží v M. Extrémů může tedy f nabývat pouze v bodech řešících následující soustavu nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda x + \mu &= 0 \\ 2 + 2\lambda y + \mu &= 0 \\ 3 + 2\lambda z &= 0 \\ x + y &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \end{aligned}$$

Hledaná řešení jsou $\pm(1/\sqrt{38}, -1/\sqrt{38}, -6/\sqrt{38})$. Snadno ověříme dosazením, že

$$\begin{aligned} \max_M f &= f(-1/\sqrt{38}, 1/\sqrt{38}, 6/\sqrt{38}) \\ \min_M f &= f(1/\sqrt{38}, -1/\sqrt{38}, -6/\sqrt{38}). \end{aligned}$$

. . . . *24.4.*

Definice. Buď $U \subset \mathbb{R}^N$ otevřená množina, $F : U \to \mathbb{R}^N$. Zobrazení F nazveme difeomorfismus, pokud $F \in C^1(U)$, $F(U)$ je otevřená množina, označme ji V, F je prostá na U a $F_{-1} : V \to U$ je $C^1(V)$.
Pokud navíc $p \in \mathbb{N}$, $F \in C^p(U)$ a $F_{-1} \in C^p(V)$, nazýváme F difeomorfismus třídy C^p.

Věta 15.12. (O inverzní funkci) Buď $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{N}$ a i) $F \in C^p(U(a))$, ii) $dF(a)$ je prosté a na, tj. $\det(\nabla F) \neq 0$.
Pak existuje $U \subset \mathbb{R}^N$ s $\boldsymbol{a} \in U$, že F je na U difeomorfismus třídy C^p.

Definice. Buď $G \subset \mathbb{R}^N$ otevřená množina, $F : G \to \mathbb{R}^N$. Řekneme, že F je regulární zobrazení na G, jestliže i) $F \in C^1(G)$, ii) $\det(\nabla F) \neq 0$ pro všechna $x \in G$.

Věta 15.13. (O regulárním zobrazení) Buď $G \subset \mathbb{R}^N$ otevřená množina, $F : G \to \mathbb{R}^N$ a $p \in \mathbb{N}$. Pak je F difeomorfismus třídy C^p právě, když F je prosté, regulární a třídy $C^p(G)$.

Poznámka. Pozor, existují zobrazení, která nejsou prostá, ale jsou regulární. Například polární souřadnice, tj. zobrazení $F(r, \varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(varphi))$ na $\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2; r > 0, \varphi \in \mathbb{R}\}$.
Co znamená transformace diferenciálního operátoru do nových souřadnic? Buď F difeomorfismus třídy $p \in \mathbb{N}$ na $U \subset \mathbb{R}^N$ a $V = F(U)$. Mějme $f : V \to \mathbb{R}$ a diferenciální operátor $L(\partial_1, \ldots, \partial_N)$, například Laplaceův operátor Δ definovaný předpisem

$$\Delta f = L(\partial_1, \ldots, \partial_N)(f) = \sum_{j=1}^{N} \partial_j^2 f.$$

Definujeme $g = f \circ F$ a ptáme se, je-li možné vyjádřit $L(\partial_1, \ldots, \partial_N)(f) \circ F$ pomocí derivací funkce g.
Například, jsou-li F polární souřadnice, $N = 2$, $p = 2$, dostáváme

$$(\Delta f)(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = \partial_r^2 g(r, \varphi) + \partial_r g(r, \varphi)/r + \partial_\varphi^2 g(r, \varphi)/r^2.$$

. . . . *30.4.2014*

16. Diferenciální rovnice.

Úmluva. V celé kapitole jsou I, J otevřené intervaly.

Definice. Buď $\boldsymbol{f} : Q \subset \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$. Obrázek

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \tag{4}$$

nazveme systémem obyčejných diferenciálních rovnic vyřešených vzhledem k 1. derivaci. Buď $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^N$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Obrázek

$$\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0 \tag{5}$$

nazveme počáteční podmínkou pro rovnici (4).
Řekneme, že funkce $\boldsymbol{y} : I \to \mathbb{R}^N$ řeší rovnici (4) na I, pokud i)$\forall x \in I$: $(x, \boldsymbol{y}(x)) \in Q$, ii)$\forall x \in I : \boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}(x))$.
Řekneme, že funkce $\boldsymbol{y} : I \to \mathbb{R}^N$ řeší rovnici (4) na I s počáteční podmínkou (5), pokud navíc $x_0 \in I$ a $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$. Říkáme také, že $\boldsymbol{y}$ prochází bodem $(x_0, \boldsymbol{y}_0)$.

Poznámka. Definiční obor $\boldsymbol{y}$, tj. interval I, je součástí pojmu řešení.

Věta 16.1. Buď $N = 1$, f lineární v y, tj. $f(x,y) = -a(x)y + b(x)$, kde $a, b : I \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce, $x_0 \in I$. Označme $A(x) = \int a(x)\,\mathrm{d}x$ na I. Pak má řešení rovnice (4) s počáteční podmínkou (5) tvar

$$y(x) = e^{A(x_0)-A(x)} y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(s)-A(x)} b(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{na } I.$$

Definice. Buď $x_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^N$. Řekneme, že řešení (4)procházející bodem $(x_0, \boldsymbol{y}_0)$ je lokálně jednoznačné řešení, pokud platí: Jsou-li $\boldsymbol{y} : I \to \mathbb{R}^N$ a $\boldsymbol{z} : J \to \mathbb{R}^N$ řešení (4), $x_0 \in I \cap J$ a $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{z}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$, existuje $\delta > 0$, že $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$ na $U(x_0, \delta)$.

Věta 16.2. (Picard-Lindeloef) Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ a $\nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N \times N}$ jsou spojité na jistém $U(x_0, \boldsymbol{y}_0)$. Pak existuje $\delta > 0$ a $\boldsymbol{y} : U(x_0, \delta) \to \mathbb{R}^N$ řešení (4) s (5). Toto řešení je lokálně jednoznačné v bodě $(x_0, \boldsymbol{y}_0)$.
Jinak řečeno: v bodě $(x_0, \boldsymbol{y}_0)$ nenastává větvení.

Lemma 16.1. (O napojování.) Nechť $\boldsymbol{y}_1 : (a, x_0) \to \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{y}_2(x) : (x_0, b) \to \mathbb{R}^N$ jsou řešení rovnice (4) $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$. Nechť $\lim\limits_{x \to x_0-} \boldsymbol{y}_1(x) = \boldsymbol{y}_0 = \lim\limits_{x \to x_0+} \boldsymbol{y}_2(x)$. Nechť $\boldsymbol{f}$ je spojitá v bodě $(x_0, \boldsymbol{y}_0)$. Potom funkce

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{cases} \boldsymbol{y}_1(x), & x \in (a, x_0) \\ \boldsymbol{y}_2(x), & x \in (x_0, b) \\ \boldsymbol{y}_0, & x = x_0 \end{cases}$$

je řešením rovnice (4) v celém (a, b).

Věta 16.3. (Peano) Nechť $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ je spojitá na okolí bodu $(x_0, \boldsymbol{y}_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Potom bodem $(x_0, \boldsymbol{y}_0)$ prochází alespoň jedno řešení rovnice (4).

Podrobně: existuje $\delta > 0$ a funkce $\boldsymbol{y} : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}^N$, která řeší (4) a splňuje $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$.

Definice. Řešení $\boldsymbol{y} : I \to \mathbb{R}^N$ rovnice (4) se nazve maximální, jestliže platí: Je-li $\boldsymbol{z} : J \to \mathbb{R}^N$ řešení rovnice (4) takové, že $I \cap J \neq \emptyset$, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$ na $I \cap J$, pak $J \subset I$.

Věta 16.4. (O utíkání z kompaktu) Buď $K \subset \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, K kompakt, $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ a $\boldsymbol{y} : (a, b) \to \mathbb{R}^N$ maximální řešení (4) takové, že existuje $x_0 \in (a, b)$, že $(x_0, \boldsymbol{y}(x_0)) \in K$. Potom existují $x_1 < x_0 < x_2$ tak, že $(x_1, \boldsymbol{y}(x_1)) \notin K$ a $(x_2, \boldsymbol{y}(x_2)) \notin K$.

Definice. Pokud $N = 1$, $f(x, y) = g(x)h(y)$, nazývá se (4) rovnice se separovanými proměnnými.

Poznámka. Obecný postup řešení rovnice se separovanými proměnnými:

- pokud $y_0 \in \mathbb{R}$ je takové, že $g(y_0) = 0$, pak $y(x) = y_0$ je tzv. singulární (stacionární) řešení. Platí na každém intervalu, na němž je definována $f(x)$.
- podle znaménka funkcí g a h určíme monotonii hledané funkce y
- podle Věty 16.2 zjistíme, kterými body prochází lokálně jednoznačné řešení a kde je možné očekávat větvení
- hledáme řešení na množinách $M \subset \mathbb{R}^2$, kde: $h(y) \neq 0$ následovně: $y'/h(y) = g(x)$, najdeme $H = \int 1/h$ a $G = \int g$. Dostáváme, pro jisté $C \in \mathbb{R}$
$$H(y(x)) = G(x) + C \tag{6}$$
Z rovnice (6) se snažíme vypočítat $y(x)$. Pozor, je potřeba, aby $G(x) + C \in \mathcal{H}(H)$ a $(x, y(x)) \in M$.
- pomocí Lemmatu 16.1 nalezená řešení napojuji.

Příklad. Rovnice $y' = 2\sqrt{|y|}$. Nacházíme tři typy řešení:
1. typ: $I = \mathbb{R}$, $J = (-\infty, 0)$, $G(y) = -\sqrt{-y}$, $F(x) = x$. Tedy $G(J) = (-\infty, 0)$, $\tilde{I} = (-\infty, -c)$. nalezené řešení $y(x) = -(x + c)^2$, $x \in (-\infty, -c)$. Pozor: pro $x > -c$ daná funkce NENÍ řešení rovnice.
2. typ: podobně - $J = (0, \infty)$, $G(y) = \sqrt{y}$, $G(J) = (0, \infty)$. Nalezené řešení $y(x) = (x + c)^2$, $x \in (-c, \infty)$. (Opět není řešení pro $x < -c$).
3. typ: zjevně $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ je řešení.

Příklad. Funkce
$$y(x) = \begin{cases} -(x + c)^2, & x < -c \\ 0, \; x \geq -c \end{cases}$$

(tj. napojení řešení typu 1 a 3) je řešení rovnice $y' = 2\sqrt{|y|}$ v $\mathbb{R}$.
Lemma 16.1 řeší vlastně jedinou věc: že rovnice je splněna v bodě napojení (jinde je to jasné) a říká, že to je zaručeno, napojím-li spojitě.

Definice. Rovnice (4) se nazve homogenní, jestliže $N = 1$ a funkce f splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$: $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$.
Postup řešení: položíme $y(x) = xz(x)$ – rovnice přejde na rovnici se separovanými proměnnými (pro novou neznámou funkci $z(x)$.) Pozor na bod $x = 0$.

Příklad. $x^2 y' + xy = 2y^2$.

Definice. Rovnice (4) se nazve Bernoulliho, jestliže $N = 1$ a existuje $\alpha \notin \{0, 1\}$: $f(x, y) = -a(x)y + b(x)y^\alpha$.
Postup řešení: substitucí $z(x) = \big[y(x)\big]^{1-\alpha}$ převedeme na lineární rovnici (pro novou neznámou funkci $z = z(x)$).

Příklad. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$, tj. $\alpha = 1/2$, $z = \sqrt{y}$ vede na $z' - 2z/x = x/2$.

Definice. Buď $\boldsymbol{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N\times N}$, $\boldsymbol{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$. Systémem N lineárních ODR prvního řádu rozumíme

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}(x)\,, \tag{7}$$

tj. rovnice

$$y_i'(x) = \sum_{j=1}^{N} A_{ij}(x)\boldsymbol{y}_j(x) + g_i(x),$$

pro $i = 1, \dots, n$, kde $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_N) : I \to \mathbb{R}^N$ jsou neznámé funkce.
Přirozená počáteční podmínka je

$$\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^N\,, \tag{8}$$

neboli $y_i(x_0) = (\boldsymbol{y}_0)_i$, $i = 1, \dots, n$, kde $x_0 \in I$ a $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^N$ jsou předepsány.

Věta 16.5. Buďte $\boldsymbol{A} : (a, b) \to \mathbb{R}^{N\times N}$, $\boldsymbol{g} : (a, b) \to \mathbb{R}^N$ spojité, $x_0 \in (a, b)$ a $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^N$. Pak existuje právě jedno maximální řešení (7) s (8). Je navíc definované na celém (a, b).

Definice. Homogenním systémem pro (7) rozumíme systém (7) s $\boldsymbol{g} = 0$, tj.

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}. \tag{9}$$

Věta 16.6. Buď $\boldsymbol{A} : (a, b) \to \mathbb{R}^{N\times N}$ spojitá. Množina všech maximálních řešení homogenní rovnice (9), označme ji $\mathcal{R}_H$, tvoří N-dimenzionální podprostor $C^1((a, b))$.

Definice. Fundamentálním systémem (9) rozumíme libovolnou bázi podprostoru $\mathcal{R}_H$. Matici, jejíž sloupce tvoří fundamentální systém (9), nazveme fundamentální maticí (9).

Poznámka. Je-li $\Phi : (a,b) \to \mathbb{R}^{N\times N}$ fundamentální matice (9) pak:
- $\Phi' = \boldsymbol{A}\Phi$
- pro $x \in (a,b)$ je $\Phi(x)$ regulární, tzn. např. $\det \Phi(x) \neq 0$
- obecné řešení (9) s (8) má tvar $\boldsymbol{y}(x) = \Phi(x)\boldsymbol{c}$, kde $\boldsymbol{c} = \Phi(x_0)^{-1}\boldsymbol{y}_0$
- $\tilde{\Phi} = \Phi\Phi(x_0)^{-1}$ je také fundamentální matice, která navíc splňuje $\tilde{\Phi}(x_0) = \boldsymbol{I}$

Věta 16.7. Buďte $\boldsymbol{A} : (a,b) \to \mathbb{R}^{N\times N}$, $\boldsymbol{g} : (a,b) \to \mathbb{R}^N$ spojité, $x_0 \in (a,b)$ a $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^N$. Buď Φ fundamentální matice (9). Pak řešení (7) s (8) má tvar pro $x \in (a,b)$

$$\boldsymbol{y}(x) = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0 + \Phi(x)\int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)\boldsymbol{g}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Poznámka. Normu matice $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ definujeme

$$\|A\| = \sup\left\{|A\boldsymbol{y}|;\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^N,\ |\boldsymbol{y}| \leq 1\right\}$$

Připomeňme, že $|\boldsymbol{y}| = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_N^2}$ je absolutní hodnota („norma“) vektoru $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^N$.
Nechť A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Potom :

(i) $\|A\| \geq 0$, a $\|A\| = 0$ právě když $A = 0$

(ii) $\|aA\| = |a|\|A\|$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$

(iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(iv) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

(v) $|Ax| \leq \|A\||x|$ pro $\forall x \in \mathbb{R}^n$

(vi) je-li A regulární, pak $|Ay| \geq |y|/\|A^{-1}\|$ pro $\forall y \in \mathbb{R}^n$

Definice. Maticovou exponenciálu definujeme předpisem $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k$ (s konvencí $A^0 = I$).

Poznámka. Řada konverguje absolutně a platí $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

Věta 16.8. Nechť $U(t) = e^{tA}$. Pak $U(t)$ je fundamentální matice rovnice

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \tag{10}$$

a platí $U(0) = I$.

Věta 16.9. [Vlastnosti maticové exponenciály.]

(i) $e^{aI} = e^a I$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$

(ii) pokud $AB = BA$, pak $e^{A+B} = e^A e^B$

(iii) $e^{C^{-1}AC} = C^{-1} e^A C$

(iv) $e^{-A} = \left(e^A\right)^{-1}$; speciálně e^A je vždy regulární

Poznámka. [Výpočet e^{tA} v praxi.] Pro nilpotentní A (tj. $A^m = 0$ pro nějaké $m \geq 1$) snadno z definice. O obecném případě (vzhledem k bodu (iii) Věty 6.3.) stačí uvažovat Jordanovu buňku $J = aI + L$, kde L (nulová až na 1 nad diagonálou) je zjevně nilpotentní. Tedy (body (i-ii) Věty 6.3.) $\exp tJ = e^{at} P(t)$, kde $P(t)$ je tvořena polynomy stupně $< n$ nad jednotkovou diagonálou. Platí $P^{-1}(t) = P(-t)$ a $\|P(t)\| \sim (1 + |t|^m)$.

Věta 16.10. [Variace konstant pro (11).] Nechť $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $g(t) : (a, b) \to \mathbb{R}^N$ je spojitá, $t_0 \in (a, b)$ a $x_0 \in \mathbb{R}^N$ jsou dána. Potom řešení rovnice

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + g(x), \qquad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0 \tag{11}$$

má tvar

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{(x-x_0)A}\boldsymbol{y}_0 + \int_{x_0}^{x} e^{(x-s)A} g(s)\,ds, \qquad x \in (a, b)$$

Definice. Rovnicí n-tého řádu, vyřešenou vůči nejvyšší derivaci, rozumíme

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\,. \tag{12}$$

Věta 16.11 Funkce $y : I \to \mathbb{R}$ je řešením rovnice (12), právě když funkce $\boldsymbol{z} : I \to \mathbb{R}^n$, kde

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \\ &\vdots \\ z_n(x) &= y^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

řeší systém

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= z_3 \\ &\vdots \\ z_{n-1}' &= z_n \\ z_n' &= f(x, z_1, \ldots, z_n)\,. \end{aligned}$$

Počáteční podmínka $\boldsymbol{z}(x_0) = \boldsymbol{\eta}$ odpovídá počáteční podmínce pro y tvaru $y(x_0) = \eta_1$, $y'(x_0) = \eta_2$, $\dots y^{(n-1)}(x_0) = \eta_n$.

Poznámka. Přirozená počáteční podmínka (tj. taková, pro níž existuje právě jedno řešení) pro rovnici 1. řádu je určená hodnotou řešení v jednom bodě.
Pro rovnici n-tého řádu je přirozená počáteční podmínka předepsat hodnotu a první až (n-1)-tou derivaci v jednom bodě.

Definice. Lineární diferenciální rovnicí řádu n rozumíme

$$Ly := a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)\,. \tag{13}$$

Terminologie: $a_i(x)$ ... koeficienty rovnice, $f(x)$ ... pravá strana.
Značení $C(I)$ ... funkce $y(x) : I \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, které jsou spojité; $C^k(I)$ ... funkce $y(x)$, které jsou spojité a jejichž derivace až do řádu k včetně jsou také spojité na I.
Řešením rovnice (13) rozumíme funkce $y(x) \in C^n(I)$, která splňuje (13) pro $\forall x \in I$.

Klíčový předpoklad (P). O rovnici (13) budeme předpokládat, že $a_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ a $f(x)$ jsou spojité na I (otevřený interval), navíc $a_0(x) \neq 0$ pro $\forall x \in I$.

Věta 16.12 Je dána rovnice (13) a platí předpoklad (P). Nechť $x_0 \in I$ a $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ jsou libovolné. Potom existuje jediná funkce $y(x) \in C^n(I)$, která řeší (13) na celém I, a splňuje počáteční podmínky

$$\begin{aligned} y(x_0) &= \eta_1 \\ y'(x_0) &= \eta_2 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= \eta_n \end{aligned}$$

Poznámka. Rovnice řádu n ... n počátečních podmínek. Existence řešení je zaručena na celém I (obor spojitosti a_i, f) – to je typické pro lineární rovnice.
Pro nelineární rovnice můžeme obecně čekat jenom lokální existenci řešení.

Značení. Při značení $\mathscr{L}[y] = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(n-k)}$ můžeme rovnici (13) přepsat jako $\mathscr{L}[y] = f$.
Speciální případ $f = 0$ je tzv. homogenní úloha

$$\mathscr{L}[y] = 0\,. \tag{14}$$

Věta 16.13 Nechť platí (P). Potom množina $\mathscr{H}$ všech řešení homogenní úlohy (14) tvoří lineární podprostor dimenze n v prostoru $C^n(I)$.

Definice. Fundamentálním systémem (F.S.) rovnice (13) rozumíme libovolnou bázi prostoru $\mathscr{H}$.
Tj. F.S. je n-tice funkcí $\{y_1, \dots, y_0\} \subset \mathscr{H}$ taková, že je-li $\tilde{y}(x)$ libovolné řešení úlohy (14), tak existují (jednoznačně určené) konstanty $c_1, \dots, c_n$ takové, že $\tilde{y}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x)$.

Věta 16.14 Nechť platí (P). Potom pro množinu $\mathscr{N}_f$ všech řešení úlohy (13) platí

$$\mathscr{N}_f = \left\{ y_p + y;\ y \in \mathscr{H} \right\},$$

kde y_p je jedno libovolně, pevně zvolené (tzv. partikulární) řešení úlohy (13).

Dodatek. Je-li y_p libovolné řešení úlohy (13), a $\{y_1, \dots, y_0\} \subset \mathscr{H}$ je fundamentální systém, pak obecné řešení úlohy (13) má tvar

$$y_o(x) = y_p(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x),$$

kde $c_j \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Poznámka. Obecný návod, jak nalézt fundamentální systém nebo partikulární řešení, neexistuje. Následující věta ale ukazuje, že můžeme nalézt řešení nehomogenní úlohy, pokud už máme fundamentální systém.

Lemma 16.2 Nechť platí (P) a nechť $\{y_1, \dots, y_0\}$ je fundamentální systém úlohy (13). Pro $x \in I$ definuji matici $U(x) = \{U_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n}$ jako $U_{ij}(x) = y_j^{(i-1)}(x)$.
Potom pro každé $x \in I$ je $U(x)$ regulární matice.

Věta 16.15 [Variace konstant.] Je dána rovnice (13) $\mathscr{L}[y] = f$ a platí (P). Nechť $\{y_1, \dots, y_0\}$ je fundamentální systém. Nechť $c_1(x), \dots, c_n(x)$ splňují pro $\forall x \in I$ soustavu

$$\begin{aligned}
c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \dots c_n'(x)y_n(x) &= 0 \\
c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \dots c_n'(x)y_n'(x) &= 0 \\
&\vdots \\
c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \dots c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) &= 0 \\
c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \dots c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) &= \frac{f(x)}{a_0(x)}.
\end{aligned}$$

Potom funkce $y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j(x)$ je řešením úlohy (13).

Poznámka. Soustava ve Větě 12.9. má tvar $U(x)C(x) = B(x)$, kde $U(x)$ je regulární matice (Lemma 12.2.), $C(x) = (c_1'(x), \dots c_n'(x))$ je neznámý vektor a $B(x) = (0, \dots, 0, \frac{f(x)}{a_0(x)})$. Můžeme tedy spočíst $c_j'(x)$ a integrací získat $c_j(x)$.