1. zkoušková písemka, NMAF052, LS 2010

Každý krok krátce a správně odůvodněte.

1. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)\frac{\operatorname{arctg}(n)}{n+2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\lg(n)e^n}.$$

2. a) Najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' = y \operatorname{sgn}(y).$$

Věnujte pozornost určení definičních oborů řešení. Načrtněte obrázek.

b) Napište fundamentální systém řešení rovnice

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

Napište v jakém tvaru budete hledat partikulární řešení (nehledejte ho).

3. Nalezněte

$$\sup_M f, \quad \inf_M f,$$

je-li

$$f(x,y) = e^{x^2-y}(y-2x), \quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}; x^2 - y < 0)\}.$$

4. Rozhodněte, zda je funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

spojitá v $(0,0)$. Spočtěte parciální derivace v $(0,0)$ a rozhodněte zda existuje $df(0,0)$. Napište ho.

Varianta 1

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin n \,\frac{\operatorname{arctg} n}{n+2}$ konverguje $\Leftrightarrow$ konverguje $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin n \,\frac{1}{n+2}$, protože

(Ř1) (Ř2)

arctg n je monotónní posl.; $\in [\operatorname{arctg} 1, \frac{\pi}{2}] \subset (0,+\infty)$ (2)

(Ř2) konverguje dle Dirichletova kritéria: $\{\sin n\}$ má omezené částečné součty

$$\frac{1}{n+2} \to 0 \text{ monotónně } \searrow$$

tedy (Ř1) konverguje (2)

(Ř2) nekonverguje absolutně, protože $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin n|}{n+2} > \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin n)^2}{n+2} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 2n}{n+2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2(n+2)}^{(Ř3)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2n}{2(n+2)}^{(Ř4)} = +\infty$$

protože (Ř3) má součet $+\infty$ a (Ř4) konverguje podobně jako nahoře (2)

tedy (Ř1) nekonverguje absolutně podle Abelova kritéria:

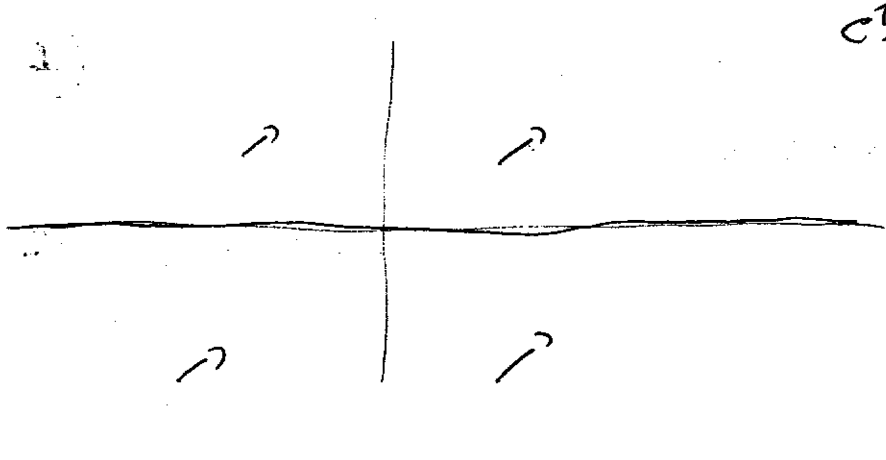
arctg n je monotónní a $\in [\operatorname{arctg} 1, \frac{\pi}{2}] \subset (0,+\infty)$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\lg n \, e^n}$ konverguje podle srovnávacího kritéria pokud konverguje (2)

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{e^n}$ a tato řada konverguje podle odmocninového kr. (2)

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{e^n}} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1 \text{, Tedy řada konverguje}$$

2) $y' = y \cdot \operatorname{sgn} y = |y|$ pravá strana je spojitá → existuje lok. řešení, C^1 vzhledem k y kromě $y=0$ → lokální jednozn. (1)



$y=0$ na $\mathbb{R}$ je řešení (1)

Separace $\frac{y'}{|y|} = 1$ pro $y \neq 0$

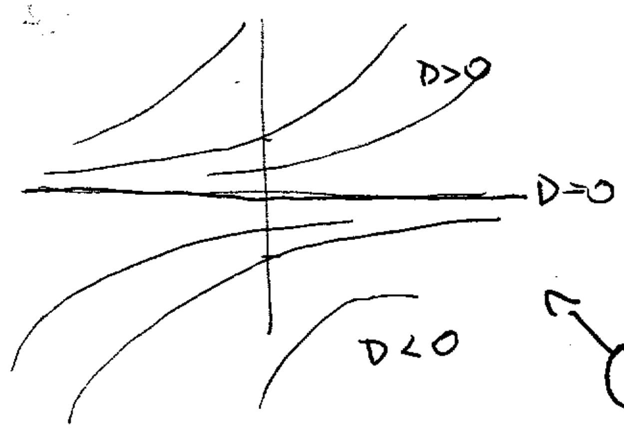
$y > 0$ $\lg y = x + C$ $\Rightarrow$ $y = De^{x}$, kde $D = e^{C} > 0$

$y < 0$ $-\lg|y| = x + C$ [redacted] $\Rightarrow$ $y = De^{-x}$, kde $D = -e^{-C} < 0$ [redacted]

řešení na $\mathbb{R}$ [redacted]

Obrázek

$\Rightarrow$ není možné napojení pro $y = 0$ [redacted]



1

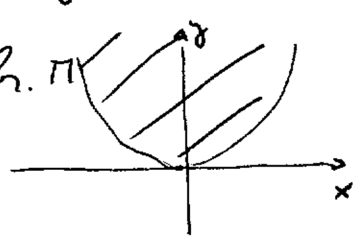
• $y'' - 2y' + y = e^{x}$ char. rovnice: $\lambda^2 - 2\lambda + \cancel{1} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$ 1

$\Rightarrow$ FS: e^{x}, xe^{x} 1 Partikulární řešení budeme hledat ve tvaru

$y_p(x) = x^2 e^{x} \cdot A$, $A \in \mathbb{R}$ 1

3) $f(x,y) = e^{x^2-y}(\cancel{x} - 2x + y)$ $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y < 0\}$

obr. M



Vidíme hned: ~~$\sup_M f = +\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x,$~~

~~$\inf_M f = -\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x,0)$~~

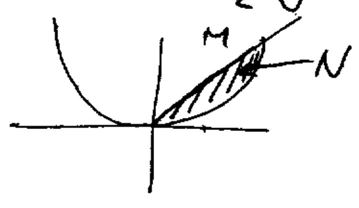
Zkusíme: $f(x, x^2+1) = e^{-1}(\cancel{x} - 5x + x^2 + 1) \longrightarrow +\infty$ pro $x \to +\infty$

$\Rightarrow \sup_M f = +\infty$ 2

Dále $e^{x^2-y} > 0$; $\cancel{x} - 2x + y < 0 \Leftrightarrow$

$N = \{y < 2x - \cancel{x}\} \cap M \Rightarrow \inf_M f = \inf_N f$ 2

obr. N



Vyšetříme f na $\bar{N}$. Nabývá se svého max a min protože $\bar{N}$ je kompaktní a f je zde spojitá! ①

uvnitř: $\nabla f(x,y) = e^{x^2-y}\left(-2 + 2x(\cancel{1}-2x+y),\ 1 + (-1)(\cancel{1}-2x+y)\right)$

Protože $\cancel{1} - 2x + y \le 0$ na N není ∇f na N nikdy nulový. ②

$\to$ žádné podezřelé body uvnitř.

hranice: • $y = 2x - \cancel{1} \Rightarrow f(x,y) = 0$

• $x^2 = y$; $f(x,x^2) = e^0(\cancel{1} - 2x + x^2) =: g(x)$

$g'(x) = 2x - 2 \Rightarrow x = 1$ je bod minima ③

$\Rightarrow \min_{\bar{N}} f = f(1,1) = \cancel{1} - 2 + 1 = -1$

Protože f nenabývá -1 v jiném bodě na $\bar{M}$, $(1,1) \in \partial M$ a f je spoj. v $(1,1)$ je $-1 = \inf_M f$ a nenabývá se. ①

4) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$ je spojitá v $(0,0)$, protože $|f(x,y)| \le \|(x,y)\|^2$ ②

$f = 0$ je-li $x=0$, nebo $y=0$ $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ ③

$df(0,0)(h_1,h_2) = 0$ protože $\frac{|f(x,y) - f(0,0) - Af(0,0)(x,y)|}{\|(x,y)\|} \le \|(x,y)\|$

$df(0,0): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ③

$\perp$.