nmaf051-zimní semestr 2012-cvičení 1
(Ne)rovnice, množiny, logika

Příklady řešené na cvičení
1,2,3,9,10,12,15,24-26,28,29,31,32

Opakování ze SŠ

Nalezněte reálnou a imaginární část **1.** $\frac{2}{1-3i}$ **2.** $(1+i\sqrt{3})^3$

Nalezněte velikosti a argumenty následujících komplexních čísel **3.** $-2-2i$ **4.** $1+i^{123}$

Dokažte **5.** $z+\overline{z} = 2\mathrm{Re}\, z$ **6.** $z-\overline{z} = 2\mathrm{Im}\, z$ **7.** $\overline{(\overline{z})} = z$ **8.** $|\overline{z}| = |z|$ **9.** $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
10. $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$ $z_1, z_2 \neq 0$ **11.** $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}$ $z_1, z_2 \neq 0$

Řešte v $\mathbb{C}$: **12.** $x^6+1=0$ **13.** $x^2+x+1=0$

Řešte v $\mathbb{R}$: **14.** $|x+1|+|x-1| \geq 2$ **15.** $|x-3|+|x+2| \leq 0$

Výroky, množiny, zobrazení

Dokažte, že platí **16.** $A \Rightarrow A$ **17.** $(A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ **18.** $A \Leftrightarrow A$ **19.** $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$ **20.** $(A \Leftrightarrow B$ a $B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$ **21.** $\mathrm{non}\,(\mathrm{non}\, A) \Leftrightarrow A$ **22.** $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\mathrm{non}\, B \Rightarrow \mathrm{non}\, A)$ **23.** $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\mathrm{non}\, B \Leftrightarrow \mathrm{non}\, A)$ **24.** $(\mathrm{non}\,(A \vee B)) \Leftrightarrow ((\mathrm{non}\, A) \wedge (\mathrm{non}\, B))$ **25.** $(\mathrm{non}\,(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\mathrm{non}\, A) \vee (\mathrm{non}\, B))$ **26.** $(\mathrm{non}\,(A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow (A \wedge (\mathrm{non}\, B))$ **27.** $(\mathrm{non}\,(A \Leftrightarrow B)) \Leftrightarrow ((A \wedge (\mathrm{non}\, B)) \vee (B \wedge (\mathrm{non}\, A))$

28. Zapište negaci výroku
$$\exists x \in \mathbb{R} : \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$$
a rozhodněte, který z výroků je pravdivý.

Platí následující výroky? **29.** $\forall a \in \mathbb{R}\, \exists \varepsilon > 0\, \exists \alpha \in \mathbb{R}\, \forall x \in (a, a+\varepsilon) : x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x-\alpha| < 1$
30. $\exists a \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \forall \alpha \in \mathbb{R}\, \exists x \in (a, a+\varepsilon) : x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x-\alpha| < 1$

Dokažte: **31.** $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ **32.** $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ **33.** Nechť A_i, $i = 1, 2, \ldots$ je systém libovolných množin a nechť $B_n = \cup_{i=1}^n A_i$. Potom $\cup_{n=1}^\infty A_n = \cup_{n=1}^\infty B_n$.

34. Dokažte, že je-li f zobrazení, pak
$$f(M_1) \setminus f(M_2) \subset f(M_1 \setminus M_2)\,.$$
(M_1, M_2 jsou podmnožiny definičního oboru f.) Kdy platí rovnost?

35. Nechť $\varphi : [0, \infty) \mapsto [1, \infty)$ je bijekce a nechť $\psi(x) = \sqrt{\varphi(x)^2 - 1}$. Dokažte, že existuje inverzní funkce ψ^{-1} a vyjádřete ji pomocí φ^{-1}. Určete $D_{\psi^{-1}}$.

Výsledky a návody: **1.** $(1+3i)/5$ **2.** -8 **3.** $2\sqrt{2}e^{5\pi i/4}$ **4.** $\sqrt{2}e^{-\pi i/4}$ **13.** $(-1 \pm \sqrt{3}i)/2$ **14.** $x \in R$ **15.** $x \in \emptyset$ **29.** Ano, $\epsilon = 3$, $\alpha = a + 1$

\- -

nmaf051-zimní semestr 2012-cvičení 2
Matematická indukce

Příklady řešené na cvičení
1,2,5,6,14,15

Matematická indukce

Dokažte matematickou indukcí následující rovnosti a nerovnosti **1.** $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$ **3.** $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq 1+\sum_{i=1}^{n} x_i$, $x_i \geq -2$, x_i mají stejná znaménka **4.** $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ (binomická věta) **5.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ **6.** $\sqrt[n]{x_1\cdot\dots\cdot x_n} \leq \dfrac{1}{n}(x_1+\dots x_n)$, $x_i \geq 0$, $i=1,2,\dots,n$ (AG nerovnost) **7.** $n! \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$ **8.** $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$
9. $\displaystyle\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\sin x_k$, $x_k \in [0,\pi]$, $k = 1,2\dots,n$ **10.** $\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$
11. $n^{n+1} > (n+1)^n$, $n \geq 3$

Reálná čísla

12. Ukažte, že $\mathbb{Q}$ je spočetná množina. **13.** Ukažte, že $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ je nespočetná množina.

Supremum, infimum množin

14. U následujících množin nalezněte sup, inf, max a min (pokud existují). Ověřte z definice!

a) $M=(0,1]$ b) $M=[0,1]$ c) $M=(0,\infty)$ d) $M=\left\{\frac{m}{n}; m,n\in N\right\}$ e) $M=\left\{0,5; 0,55; 0,555;\dots\right\}$
f) $M=\left\{x\in Q; x^2<3\right\}$. Ukažte, že $\sup M \notin Q$.

15. Nechť A, B jsou neprázdné omezené podmnožiny R. Dokažte: a) $\inf(-A) = -\sup A$ b) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

c) $\inf(A-B) = \inf A - \sup B$ d) $\sup(A\cdot B) = \sup A \cdot \sup B$, kde A, B obsahují pouze nezáporné prvky. Množiny $-A = \{x; -x\in A\}$, $A+B = \{z; z=x+y, x\in A, y\in B\}$, ostatní jsou definovány analogicky.

16. Nechť A, B jsou neprázdné omezené podmnožiny R. Lze obecně vyjádřit $\sup(A\cup B)$ a $\sup(A\cap B)$ pomocí $\sup A$ a $\sup B$?

17. Nechť M je neprázdná množina a nechť $f: M\mapsto R$ a $g: M\mapsto R$ jsou omezené funkce. Dokažte, že a) $\sup_{x\in M}(f(x)+g(x)) \leq \sup_{x\in M} f(x) + \sup_{x\in M} g(x)$. Musí platit rovnost? b) $\sup_{x\in M}(f(x)+g(x)) \geq \sup_{x\in M} f(x) + \inf_{x\in M} g(x)$ c) $\sup_{x\in M}(f(x)-g(x)) \leq \sup_{x\in M} f(x) - \inf_{x\in M} g(x)$

Výsledky a návody:

– –

nmaf051-zimní semestr 2012-cvičení 3

Limity

Dokažte z definice, že **1.** $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ **2.** $\lim_{x\to 1^+}[x]=1$ **3.** $\lim_{x\to 1^-}[x]=0$

Spočtěte **4.** $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ **5.** $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ **6.** $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-2x}-\frac{x}{x^2-4}\right)$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)\dots(1+nx)-1}{x}$ **8.** $\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$ **9.** $\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

10. $\lim_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$ **11.** $\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\dots x^n-n}{x-1}$ **12.** $\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$

13. $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x^2}+1}{\sqrt{\frac{3}{x^4}-\frac{6}{x^2}+5}}$ **14.** $\lim_{x\to 0+}\frac{(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-1})}{x}$

15. $\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$ **16.** $\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$ **17.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

18. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1-x)}{x}$ **19.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$ **20.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-\sqrt[n]{1+x}}{x}$

21. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x}}$ **22.** $\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a\ge 0$ **23.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}$

24. $\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{x-a}$, $a\in R$ **25.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$ **26.** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$ **27.** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$

28. $\lim_{x\to \pi}\frac{\sin nx}{\sin mx}$, $n,\ m\in N$ **29.** $\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{1-x}$ **30.** $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}2x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

31. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$, $a\in R$ **32.** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{cotg}(a+2x)-2\operatorname{cotg}(a+x)+\operatorname{cotg}a}{x^2}$, $\sin a\neq 0$

Výsledky a návody: **15.** 1 **24.** $1/\cos^2(a)$ **25.** $\sqrt{2}$ **27.** 14 **28.** $(-1)^{n-m}\frac{n}{m}$ **31.** $-\sin(a)$

\- -

Základní limity

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

Pro výpočet limit typu "1^∞":

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln(f(x))}\,.$$

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$ **2.** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x}$ **3.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$, $a,\ b\in R$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)+\ln(a-x)-2\ln a}{x^2}$, $a>0$ **5.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}+ax))}{\sin bx}$, $a,\ b\in R$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\ln(x\ln a)\ln\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)$, $a>0$ **7.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x\mathrm{e}^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$ **8.** $\displaystyle\lim_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$ **9.** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ **10.** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}\,x}$ **11.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\mathrm{tg}\,x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$ **12.** $\displaystyle\lim_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\mathrm{cotg}\,\pi x}$ **13.** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$
14. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\mathrm{cotg}\,\pi x}$ **15.** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}\,x)^{\mathrm{tg}\,2x}$ **16.** $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x^\alpha}{\sin\pi x^\beta}$, $\alpha,\ \beta\in R$ **17.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}-\mathrm{e}^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$, $\alpha,\ \beta\in R$ **18.** $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$, $a\in R^+$ **19.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ **20.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a,\ b\in R^+$

Výsledky a návody:

– –

nmaf051-zimní semestr 2012-cvičení 6
Elementární funkce a spojitost

Spojitost funkcí

1. Dodefinujte funkci v bodě 0 tak, aby byla spojitá: $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$. Zjistěte, kde jsou nespojité funkce **2.** $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ **3.** $f(x) = \operatorname{sgn} \cos \frac{1}{x}$. **4.** Vyšetřete spojitost složených funkcí $f(g(x))$ a $g(f(x))$, je-li $f(x) = \operatorname{sgn} x$ a $g(x) = x(1-x^2)$. Zjistěte, zda jsou spojité funkce **5.** $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ if $x \neq 0$ and $f(x) = 1$ if $x = 0$, **6.** $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ if $x \neq 0$ a $f(x) = 0$ if $x = 0$. **7.** Dokažte, že jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ spojité v x_0, pak jsou spojité v x_0 i funkce a) $\min\{f(x), g(x)\}$
b) $\max\{f(x), g(x)\}$. **8.** Uveďte příklad funkce nespojité v každém $x \in \mathbb{R}$, jejíž druhá mocnina je spojitá na $\mathbb{R}$.

Elementární funkce

Dokažte vlastnosti funkce exp: **9.** $\exp(x)$ zobrazuje $\mathbb{R}$ vzájemně jednoznačně na $(0, \infty)$ **10.** $\exp(0) = 1$ **11.** $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$ **12.** $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ **13.** $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ **14.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ **15.** $D(\exp) = \mathbb{R}$, $H(\exp) = (0, +\infty)$.

Dokažte vlastnosti funkce lg:

16. $\ln 1 = 0$, **17.** $\ln(1/x) = -\ln(x)$, **18.** $\ln(x^n) = n \ln(x)$ pro $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$ **19.** $\ln(\sqrt[k]{x}) = (1/k)\ln(x)$ pro $k \in \mathbb{N}$, $x > 0$, **20.** $\lim\limits_{x\to 0+} = -\infty$, **21.** $\ln((0,\infty)) = \mathbb{R}$. Obor hodnot je interval (ze spojitosti); podle předchozího je shora i zdola neomezený.

Dokažte vlastnosti funkcí sin a cos:

22. $\cos 0 = 1$, **23.** $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, **24.** $|\sin(x)| \leq 1$, $|\cos(x)| \leq 1$ v $\mathbb{R}$ **25.** $\cos(\pi/2) = 0$, $\cos(\pi) = -1$, $\sin(-\pi/2) = -1$ **26.** $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$, **27.** funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ jsou 2π-periodické **28.** funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ lze vzájemně nahradit: $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$ $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ **29.** $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$ $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

30. další užitečné vzorce: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$, $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$,

31. základní limita pro cos: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Dokažte, že **32.** $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ **33.** $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$ **34.** $\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $x \in \mathbb{R}$ **35.** $\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, $|x| \geq 1$ **36.** $\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$ **37.** $\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$, $|x| > 1$

Výsledky a návody: **16.** neboť $\ln 1 = \ln(1.1) = \ln 1 + \ln 1$ **17.** neboť $0 = \ln 1 = \ln(x \cdot 1/x) = \ln(x) + \ln(1/x)$
22. neboť $1 = \sin(\pi/2+0) = \sin(\pi/2)\cos 0 + \cos(\pi/2)\sin 0 = \cos 0 + 0$ **23.** neboť $1 = \cos 0 = \cos(x + (-x)) = \mathrm{c}$
29. - tyto vzorce odvodíme následujícím trikem: položíme $x := (a+b)/2$, $y := (a-b)/2$. Pak $a = x+y$, $b = x - y$ a užijeme součtové vzorce.

Příklady řešené na cvičení

1-3,6,9

Derivace

1. Existuje derivace funkce $f(x) = x|x|$ v bodě 0?

2. Pro jaké α reálné má funkce

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

derivaci v bodě 0. Kdy je tato derivace v bodě 0 spojitá?

3. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \text{ je racionální} \\ 0 & x \text{ je iracionální.} \end{cases}$$

má derivaci pouze v nule.

4. Ukažte, že derivace sudé funkce je funkce lichá.

5. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ ax + b & x > 1\,. \end{cases}$$

Určete a, b tak, aby $f(x)$ měla v bodě 1 derivaci.

6. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ v bodě $[-2, ?]$ grafu.

Derivace

7. Dokažte vztahy pro derivace cyklometrických, hyperbolických a hyperbolometrických funkcí.

Vypočtěte derivace následujících funkcí ve všech bodech x, kde derivace existuje:

8. $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$ **9.** $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$ **10.** $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$ **11.** $f(x) = \sin\sin\sin x$ **12.** $f(x) = 2^{\mathrm{tg}\frac{1}{x}}$ **13.** $f(x) = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$ **14.** $f(x) = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$ **15.** $f(x) = \mathrm{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$ **16.** $f(x) = x\mathrm{arcsin}^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\mathrm{arcsin} x - 2x$ **17.** $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})\,.$

Výsledky a návody:

– –

nmaf051-zimní semestr 2012-cvičení 8

ODR a primitivní funkce

Nalezněte obecná řešení rovnic:

1. $y'' - 2y' - 3y = \mathrm{e}^{4x}$ **2.** $y'' - y = 2\mathrm{e}^{x} - x^2$ **3.** $y'' - 3y' + 2y = \sin x$ **4.** $y'' + 4y' - 5y = 2\mathrm{e}^{x}\sin^2 x$
5. $y'' - 2y' + y = 2x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x}\sin 2x$ **6.** $y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$ **7.** $y'' + 4y = 2\mathrm{tg}\, x$ **8.** $y'' + y' = \frac{1}{1+\exp x}$

Nalezněte následující primitivní funkce na maximálních možných intervalech. Určete i tyto intervaly. **9.** $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$ **10.** $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} dx$ **11.** $\int \mathrm{tg}^2\, x dx$ **12.** $\int \frac{1}{x^2-x+2} dx$ **13.** $\int \max\{1, x^2\} dx$
14. $\int x\mathrm{e}^{-x^2} dx$ **15.** $\int \frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} dx$ **16.** $\int \mathrm{e}^{3x}\cos 2x dx$ **17.** $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ **18.** $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2} dx$

19. $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$ **20.** $\int \frac{1}{\sin x} dx$ **21.** $\int \frac{1}{\sin x \cos^3 x} dx$ **22.** $\int \ln x dx$ **23.** $\int x^3 a^{-x^2} dx$ **24.** $\int x\mathrm{arctg}\,(x+1) dx$ **25.** $\int x^2 \arccos x dx$ **26.** $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ **27.** $\int \sin(\ln x) dx$ **28.** $\int \sin^7 x dx$ **29.** $\int \cos^2 x dx$

– –

nmaf051-zimní semestr 2012-cvičení 9

Primitivní funkce

1. Nalezněte rekurentní vztah pro $\int \cos^n x dx,\ n \in N$ **2.** $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$ **3.** $\int \frac{1}{(x^3+1)^2}dx$

Vhodnou substitucí převeďte integrály na integrály z racionálních funkcí a ty se pokuste vyřešit.

4. $\int \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$ **5.** $\int x\sqrt{x^2-2x+2}dx$ **6.** $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx$ **7.** $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$

Nalezněte následující primitivní funkce

8. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx$ **9.** $\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}dx$

10. $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^3 x}dx$ **11.** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$ **12.** $\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$ **13.** $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$

– –

Limity funkcí v nevlastních bodech

1. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{a_n x^n + \dots a_1 x + a_0}{A_m x^m + \dots A_1 x + A_0}$, $a_n \neq 0$, $A_m \neq 0$ **2.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{3x^4 - 6x^2 + 5}}$ **3.** $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$ **4.** $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{4}{3}}(\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-1})$

Limita posloupnosti

Vypočítejte **5.** $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6 - 6n^5 + 2} + \sqrt[5]{n^7 + n^3 + 1}}$ **6.** $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$, $a \in R$ **7.** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ **8.** $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dots + \dfrac{1}{n(n+1)}$ **9.** $\lim_{n\to\infty} a_n$, kde $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$, $n \geq 1$ **10.** $\lim_{n\to\infty} a_n$, $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + \dfrac{1}{a_n})$, $n \geq 1$ **11.** Zjistěte, pro která x existuje $\lim_{n\to\infty} \sin nx$. Najděte $\limsup_{n\to\infty}$ a $\liminf_{n\to\infty}$ **12.** $a_n = \dfrac{n-1}{n+1} \cos \dfrac{2}{3} n\pi$ **13.** $a_n = n(2 + (-1)^n)$ **14.** $a_n = \cos^n \dfrac{2}{3} n\pi$

Najděte hromadné body následujících posloupností **15.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}, \dots$
16. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$

---

nmaf051-zimní semestr 2012-cvičení 11

Průběh funkce

viz http://www.karlin.mff.cuni.cz/~prazak/vyuka/051/Cviceni/prubeh.pdf

na stránce http://www.karlin.mff.cuni.cz/~prazak/vyuka/051/

– –

nmaf051-zimní semestr 2012-cvičení 12

Taylorovy polynomy a L'Hospitalova pravidlo

viz http://www.karlin.mff.cuni.cz/~prazak/vyuka/051/Cviceni/taylor.pdf

– –