3. zápočtová písemka – nmaf051 – 25.10.2012

Spočtěte $L = \lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{(x+1)(x-2)}$.

Řešení:

$$L = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+4}{x+1} = *$$

použil jsem v čitateli vzorec: $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$

funkci, ze které počítám limitu jsem změnil pouze v bodě 2, na kterém nezáleží

$$* = \frac{2^2+2\cdot 2+4}{2+1} = 4$$

Použil jsem větu o aritmetice limit.

4. zápočtová písemka

Najděte $\sup M$, $\inf M$ a pokud existují, také $\max M$ a $\min M$.

$$M = \left\{\frac{1}{\sqrt{1+k}},\ k\in\mathbb{N}\right\} \cup \left\{1-\frac{1}{\sqrt{k-1}},\ k\in\{2,3,\dots\}\right\} \cup \{2\}$$

Řešení: 1) $2\in M \wedge 2 > \frac{1}{\sqrt{1+k}}\ \forall k\in\mathbb{N} \wedge 2 > 1-\frac{1}{\sqrt{k-1}}\ \forall k\in\{2,3,\dots\}$

$$\Rightarrow 2 = \max M \Rightarrow 2 = \sup M$$

2) Limita: $\frac{1}{\sqrt{1+k}} \searrow 0$ a $0 < \frac{1}{\sqrt{1+k}}\ \forall k\in\mathbb{N}$ a $0 < 1-\frac{1}{\sqrt{k-1}} \wedge 0<2\quad \forall k\in\{2,3,\dots\}$

Vol $s>0$. Řeším $\frac{1}{\sqrt{1+k}} < s$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{s} < \sqrt{1+k} \Leftrightarrow \frac{1}{s^2} < 1+k \Leftrightarrow k > \frac{1}{s^2}-1$. Takové k ex. podle Archimedova principu

Tedy $\inf M = 0$ ale $0 \in M$ a tedy min ~~max~~ existuje a $\min M = 0$.

1. zápočtová písemka - nmaf051 - 10.10.2012

Zadání: Buď $I \subset \mathbb{R}$ interval, $f : I \to \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$.

Napište negaci výroku:

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ \forall y \in I : y \in (x-\delta, x+\delta) \Rightarrow f(y) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$$

Řešení:

$$\exists x \in I, \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists y \in I : y \in (x-\delta, x+\delta) \wedge f(y) \notin (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$$

2. zápočtová písemka - nmaf051 - 17.10.2012

Najděte sup M, inf M a pokud existují také max M a min M, je-li

$$M = (0,1] \cup \left\{-1 + \frac{\sqrt{2}}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{4\}$$

Řešení: Zjevně 4 je horní odhad M a $4 \in M$. Proto $\sup M = \max M = 4$.

Zjevně -1 je dolní odhad M. Vezme $s > -1$ a značme $\varepsilon = s - (-1) > 0$. Pak z Archimedovy vlastnosti existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{\sqrt{2}}{n_0} < \varepsilon$ a tedy $-1 + \frac{\sqrt{2}}{n_0} < -1 + s - (-1) = s$.

Tedy $-1 = \inf M$. Protože $-1 \notin M$, $\min M$ neexistuje.