Zkoušková písemka, NMAF051, ZS 2012, varianta 6

Každý krok krátce a správně odůvodněte.

1. Najděte $\alpha \in \mathbf{R}$ tak, aby limita byla konečná a nenulová a spočtěte ji

$$\lim_{x\to\pi} \frac{e^x(x-\pi) + e^\pi \sin(x)}{(x-\pi)^\alpha}.$$

2. Najděte primitivní funkci na maximálních intervalech

$$\int \lg(x^2+1)(x^3+6x)\mathrm{d}x.$$

3. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) := (x^2+x)e^x.$$

   Studujte zejména: def. obor, spojitost, limity v krajních bodech, derivaci, její limity, monotonii, druhou derivaci, konvexitu, obor hodnot a načrtněte kvalifikovaný obrázek.

4. Najděte primitivní funkci na maximálních intervalech, kde existuje

$$\int |x+1|^3 \mathrm{d}x.$$

5. Najděte obecné řešení rovnice

$$y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = \cos(2x)e^{-x}.$$

   Nezapomeňte na určení definičního oboru řešení.

Poslední písemka

1) $$\lim_{x\to\pi} \frac{e^x(x-\pi)+e^\pi \sin x}{(x-\pi)^\alpha} \overset{3}{=} \lim_{y\to 0} \frac{e^{y+\pi}y+e^\pi \sin(y+\pi)}{(y)^\alpha} =$$

$$e^\pi \lim_{y\to 0} \frac{ye^y-\sin y}{y^\alpha} \overset{3}{=} e^\pi \lim_{y\to 0} \frac{y(1+y+o(y))-\cancel{y}+o(y^2)}{y^\alpha}$$

$$= e^\pi \lim_{y\to 0} \frac{y^2+o(y^2)}{y^\alpha} \overset{3}{=} e^\pi \quad (\text{pro } \alpha=2)$$

l'Hospitalem: $$L \overset{3}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{e^x(x-\pi+1)+e^\pi(\cancel{\sin x}+\cos x)}{\alpha(x-\pi)^{\alpha-1}}$$ nebo

$$\overset{3}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{e^x(x-\pi+2)+e^\pi(-\sin x)}{\alpha(\alpha-1)(x-\pi)^{\alpha-2}} \underset{\alpha=2}{\overset{3}{=}} \frac{e^\pi\cdot 2}{2} = e^\pi$$

9

Σ 9

2) $$\int \lg(x^2+1)(x^3+6x)\,dx \overset{3}{=} \frac{1}{2}\int \underbrace{2x}_{\varphi'(x)}(x^2+1+5)\lg\underbrace{(x^2+1)}_{\varphi(x)}\,dx$$

$f(y)=(y+5)\lg y$

$$\int \underbrace{(y+5)}_{\downarrow i}\underbrace{\lg y}_{\downarrow d}\,dy = \left(\frac{y^2}{2}+5y\right)\lg y - \int \frac{y}{2}+5\,dy =$$

$$\frac{y^2}{2}+5y \quad \frac{1}{y} \quad = \left(\frac{y^2}{2}+5y\right)\lg y - \frac{y^2}{4}-5y \quad \text{na } (0,+\infty)$$ 4

$\varphi: \mathbb{R} \to (0,+\infty) \Rightarrow$ Hledaná p. f. je

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x^2+1)^2+5(x^2+1)\right)\lg(x^2+1)-\frac{1}{4}(x^2+1)^2-5(x^2+1) \quad \text{na } \mathbb{R}$$ 3

Σ 10

5) $D(f) = \mathbb{R}$ a $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $f(-\infty+) = 0$, $f(+\infty-) = +\infty$ 3

na $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{x}(x^2+x+2x+1)$, $f'(-\infty+) = 0$, $f'(+\infty-) = +\infty$ 2

$f'(x) = 0 \iff x^2+3x+1 = 0 \iff x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = -\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

značíme $x_1 < x_2$ 2

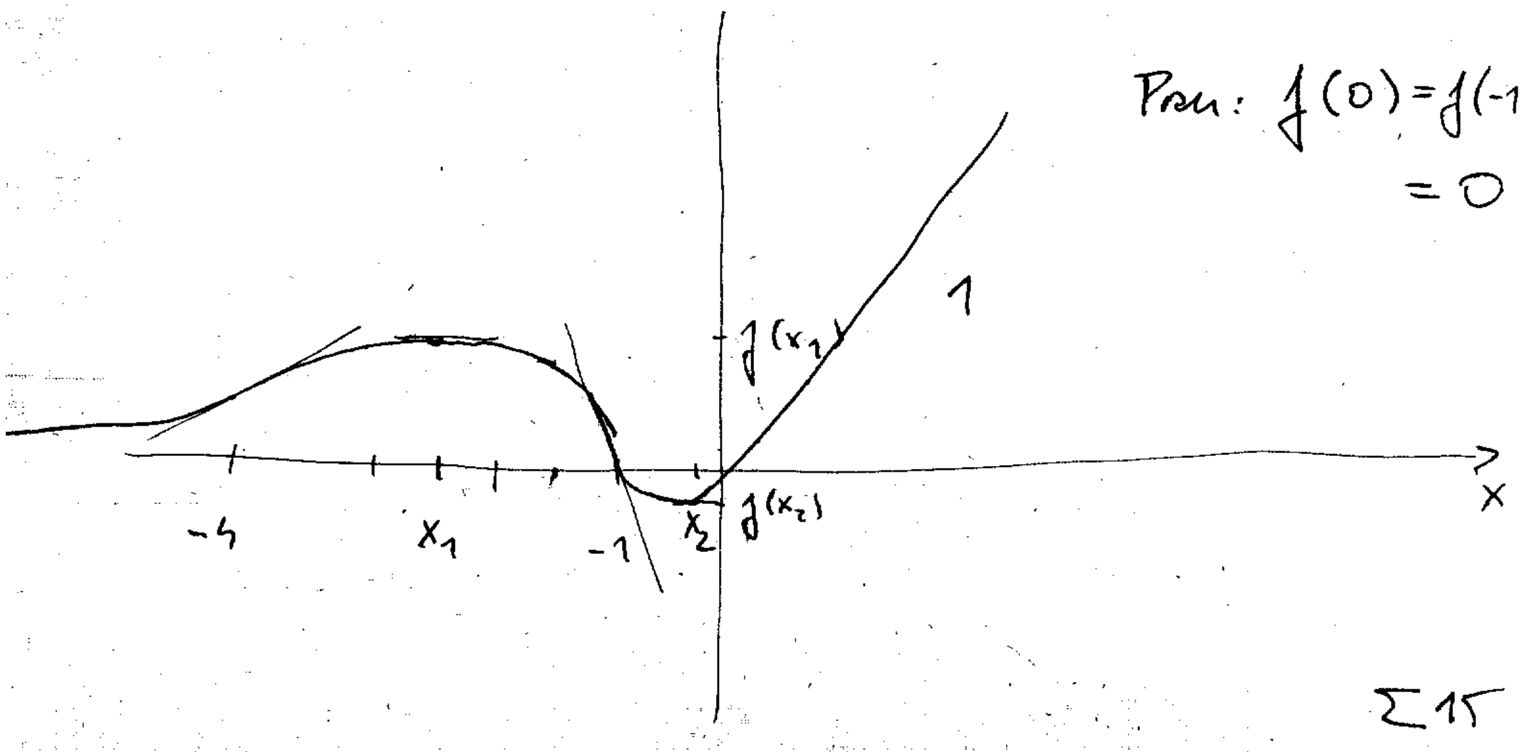
f je klesající na $[x_1, x_2]$ a rostoucí na $(-\infty, x_1]$ a $[x_2, +\infty)$ 2

$\underset{x \in \mathbb{R}}{f''(x)} = e^{x}(x^2+3x+1+2x+3) = e^{x}(x^2+5x+4)$

$f''(x) = 0 \iff x^2+5x+4 = 0 \iff x = -1$ nebo -4 2

$\Rightarrow$ f je konvexní na $(-\infty, -4]$ a $[-1, +\infty)$ a konkávní na $[-4, -1]$ 2

$H(f) = [f(x_2), +\infty)$, protože $f(x_2) = e^{-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right) < 0$ 1



Pozn: $f(0) = f(-1) = 0$

$\Sigma 15$

4) $$\int |x+1|^3\,dx = \begin{cases} (x>-1)\ \int (x+1)^3\,dx = \dfrac{(x+1)^4}{4} & x>-1 \\ (x<-1)\ -\int (x+1)^3\,dx = -\left(\dfrac{(x+1)^4}{4}\right) & x<-1 \end{cases}$$ 4

V $x=-1$ napojíme spojitě:

$$F(x) = \frac{|x+1|^3}{4}(x+1) \quad \text{je PF na } \mathbb{R}$$ 2

$\Sigma 6$

5) char. rce: $\lambda^2+2\lambda+5=0$ $\quad \lambda_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i$ 2

FS: $e^{-x}\cos 2x,\ e^{-x}\sin 2x$ 2

Řešení ve spec. tvaru hledáme jako

$$y(x) = Axe^{-x}\cos 2x + Bxe^{-x}\sin 2x$$ 2

$$y'(x) = e^{-x}\left(\cos 2x\,(A - Ax + 2Bx) + \sin 2x\,(-2Ax + B - Bx)\right)$$

$$y''(x) = e^{-x}\Big(\cos 2x\,(-A+2B-A+Ax-2Bx-4Ax+2B-2Bx) + \sin 2x\,(-2A-B+2Ax-B+Bx-2A+2Ax-4Bx)\Big)$$

$$y''(x)+2y'(x)+5y(x) = e^{-x}\cos 2x\Big(\underbrace{-2A+4B+2A}_{=0} + x\underbrace{(-3A-4B-2A+4B+5A)}_{=0}\Big)$$

$$e^{-x}\sin 2x\Big(-4A\underbrace{-2B+2B}_{0} + x\underbrace{(4A-3B-4A-2B+5B)}_{=0}\Big)$$

Porovnáme: $4B=1$; $-4A=0 \Rightarrow B = 1/4$ 2

Obecný tvar řešení je: $\Sigma 10$

$$y(x) = e^{-x}\cos 2x\,(\alpha) + \beta e^{-x}\sin 2x + \frac{x}{4}e^{-x}\sin 2x$$

na $\mathbb{R}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ lib.$)$ 2