Zkoušková písemka, NMAF051, ZS 2012, varianta 5

Každý krok krátce a správně odůvodněte.

1. Najděte $\alpha \in \mathbf{R}$ tak, aby limita byla konečná a nenulová a spočtěte ji

$$\lim_{x \to 1-} \frac{\sqrt{\cos(\frac{\pi x}{2})} - \sqrt{1-x}}{(1-x)^\alpha}.$$

2. Najděte primitivní funkci na intervalu

$$\int x \arcsin(x+2) \mathrm{d}x.$$

3. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) := \begin{cases} \operatorname{arctg}(\lg(|x|)) & , \quad \text{pro } x \neq 0 \\ \pi & \quad\ \ \text{pro } x = 0 \end{cases}.$$

   Studujte zejména: def. obor, spojitost, limity v krajních bodech, derivaci, její limity, monotonii, druhou derivaci, konvexitu, obor hodnot a načrtněte kvalifikovaný obrázek.

4. Najděte $T^f_{1,2}$, je-li $f(x) = (x^2 + 3x - 2)e^x$.

5. Najděte obecné řešení rovnice

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = xe^{-x}.$$

   Nezapomeňte na určení definičního oboru řešení.

Kvantitativní písemka mat051 - ZS2012 - varianta 5

1) $$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} - \sqrt{1-x}}{(1-x)^{\alpha}} = \lim_{x\to 1-} \frac{\cos\frac{\pi x}{2} - 1 + x}{\left(\sqrt{\cos\frac{\pi x}{2}} + \sqrt{1-x}\right)(1-x)^{\alpha}} \overset{AL}{=} *$$

Spočteme:

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{\cos\frac{\pi x}{2}}}{\sqrt{1-x}} \underset{\text{Věta o limitě slož. fce}}{=} \sqrt{\lim_{x\to 1-} \frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}} \overset{l'H}{=} \sqrt{\lim_{x\to 1-} \frac{\pi}{2}\,\frac{-\sin\frac{\pi x}{2}}{-1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

3

Podobně: $$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^{1/2}} = 1$$ 2

$\Longleftarrow$ (+)

$$* \overset{AL}{=} \lim_{x\to 1-} \frac{\cos\frac{\pi x}{2} - 1 + x}{(1-x)^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

$\frac{\pi}{2}\left(-\sin\frac{\pi x}{2}\right)$

Spočteme $$T_{1,1}^{\cos\frac{\pi x}{2}}(x) = \cos\frac{\pi\cdot 1}{2} + \left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)'\Big|_{x=1}(x-1) + o\left((x-1)^2\right)$$

$$+ \frac{\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)''}{2}\Big|_{x=1}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2}(x-1) + o(x-1) \quad \text{a tedy}$$

$$(*) = \frac{1}{1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cdot \lim_{x\to 1-} \frac{-\frac{\pi}{2}(x-1) - (1-x) + o(x-1)}{(1-x)^{\alpha+1/2}} \underset{\alpha = 1/2}{=}$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - 1$$

Vypočet šlo podstatně zkrátit. V momentě (+) šlo použít AL přímo na původní limitu. 3

2) $\int \underbrace{x}_{+2-2} \cdot \arcsin(x+2)\, dx =$ 1 věta o subst.

$x+2 = \varphi(x)\ ;\ \varphi'(x) = 1$

$\int (t-2) \arcsin t \, dt$

a) $\int 1 \cdot \arcsin t \, dt = (t \arcsin t) + \frac{1}{2} \int \frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}} \, dt =$

$\downarrow i \quad \downarrow d$

$t \qquad \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$t \arcsin t + \cancel{1} \cdot \sqrt{1-t^2}$ na $(-1,1)$

b) $\int t \arcsin t \, dt = \left(\frac{t^2}{2} \cdot \arcsin t \right) - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \, dt =$

$\downarrow i \quad \downarrow d$

$\frac{t^2}{2} \qquad \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$= \frac{t^2}{2} \arcsin t + \frac{1}{2} \int \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$

$= \frac{t^2}{2} \arcsin t + \frac{1}{2} \int \sqrt{1-t^2} \, dt - \frac{1}{2} \arcsin t$ na $(-1,1)$

$\int \sqrt{1-t^2} \, dt =$ 2 subst.

$t = \sin \varphi ; \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$= g(\varphi)$

$g'(\varphi) = \cos \varphi \ ; \ g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-1,1)$ prostá na

$\int \cos^2 \varphi \, d\varphi = \int \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \, d\varphi = \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{2} \frac{\sin 2\varphi}{2}$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\int \sqrt{1-t^2} \, dt = \frac{1}{2} \arcsin t + \frac{1}{2} t \cdot \sqrt{1-t^2}$ na $(-1,1)$

Krátce: $\int t \arcsin t \, dt = \frac{t^2}{2} \arcsin t + \frac{1}{4} (\arcsin t + t\sqrt{1-t^2}) - \frac{1}{2} \arcsin t$ na $(-1,1)$

Hledaná PF je tedy:

$\arcsin t \left(\frac{t^2}{2} + t(\cancel{2}) - \frac{1}{4} \right) + \sqrt{1-t^2} \left(-2 + \frac{t}{4} \right)$ na $(-1,1)$.

3) $D(f) = \mathbb{R}$; f je spojitá na $D(f) \setminus \{0\}$ protože

$\lim_{x \to 0} f(x) = -\frac{\pi}{2}$; $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ a f je sudá

$$f'(x) \underset{x \in D(f)\setminus\{0\}}{=} \frac{1}{1+\lg^2|x|} \cdot \frac{1}{x} \; ; \; \lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = 0$$

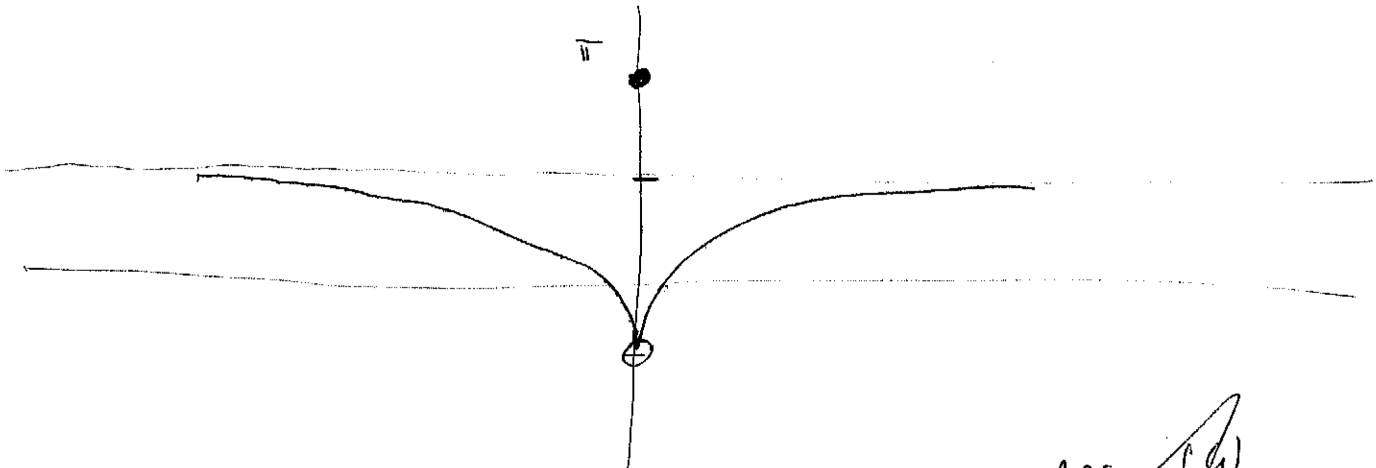
$\lim_{x \to 0\pm} f'(x) = \pm\infty \Rightarrow$ f je rostoucí na $(0,+\infty)$ a klesající na $(-\infty,0)$ a

$H(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup \{\pi\}$

$$f''(x) \underset{x \in D(f)\setminus\{0\}}{=} -\frac{2\lg|x|}{(1+\lg^2|x|)^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+\lg^2|x|} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x^2} \frac{2\lg|x| + 1 + \lg^2|x|}{(1+\lg^2|x|)^2}$$

$$= -\frac{1}{x^2} \frac{(1+\lg|x|)^2}{(1+\lg^2|x|)^2} < 0$$

$\Rightarrow$ f je konkávní na $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$



$\cancel{f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}}$

a

4) $f'(x) = e^x(x^2+3x-2+2x+3) = e^x(x^2+5x+1)$ $\quad f'(1) = 7e$

$f''(x) = e^x(x^2+5x+1+2x+5) \Rightarrow f''(1) = e.14$

$\Rightarrow T_{1,2}^{f}(x) = e\left(2+7(x-1)+7(x-1)^2\right)$

5) char. rce: $\lambda^2+3\lambda+2 = (\lambda+2)(\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1, -2$

f.s.: $e^{-x}; e^{-2x}$

Řešení s RHS Hledáme ve tvaru: $e^{-x}(Ax^2+Bx) = y_p(x)$ $\quad /\cdot 2$

$y_p'(x) = e^{-x}(2Ax+B-Ax^2-Bx)$ $\quad /\cdot 3$

$y_p''(x) = e^{-x}(2A-2Ax-B-2Ax-B+Ax^2+Bx)$

$y_p''(x)+3y_p'(x)+2y(x) = e^{-x}\Big(x^2\underbrace{(A-3A+2A)}_{=0}+x(-2A-2A+B+6A-3B+2B)+(2A-B-B+3B)\Big)$

$= e^{-x}\big(x(2A)+(2A+B)\big)$

$\Rightarrow 2A = 1;\ 2A+B = 1+B = 0 \Rightarrow$

$A = \frac{1}{2};\ B = -1$

Hledané řešení na $\mathbb{R}$ je:

$$y(x) = e^{-x}\left(\frac{x^2}{2}-x+\alpha\right)+\beta e^{-2x} \text{ pro lib } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$