Zkoušková písemka, NMAF051, ZS 2012, varianta 3

Každý krok krátce a správně odůvodněte.

1. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3 - \lg(x) + \operatorname{arctg}(x)}}{x\sqrt{\lg(x) + x^2}}.$$

2. Najděte primitivní funkci na maximálních intervalech
$$\int \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{\lg^2(x) + 2\lg(x) + 2}} \mathrm{d}x.$$

3. Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) := \sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^3}.$$
Studujte zejména: def. obor, spojitost, limity v krajních bodech, derivaci, její limity, monotonii, druhou derivaci, konvexitu, obor hodnot a načrtněte kvalifikovaný obrázek.

4. Spočtěte $a, b, c \in \mathbf{R}$ tak, aby platilo $f \in C^2(\mathbf{R})$, je-li
$$f(x) = \begin{cases} (1+t)^5, & t \le 1 \\ at^2 + b^t + c, & t > 1 \end{cases}.$$

5. Najděte obecné řešení rovnice
$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = (x^2 + 2)e^x.$$
Nezapomeňte na určení definičního oboru řešení.

nmaf051 – ZK – 2012 – vm. 3

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^3-\lg x+\operatorname{arctg} x}}{x\sqrt{\lg x+x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{3/2}\sqrt{1-\frac{\lg x}{x^3}+\frac{\operatorname{arctg} x}{x^3}}}{x^2\sqrt{\frac{\lg x}{x^2}+1}} \overset{AL}{=} 0$

6 3 3

2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\frac{1}{\sqrt{\lg^2 x+2\lg x+2}}\,dx$ substituce $\lg x=\varphi(x)$; $\varphi'(x)=\frac{1}{x}$ 3

11

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{t^2+2t+2}}\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{(t+1)^2+1}}\,dt = \operatorname{argsinh}(t+1)$ na $\mathbb{R}$ 3

Proč: $(\operatorname{argsinh} s)' = \dfrac{1}{\sinh'(\operatorname{argsinh} s)} = \dfrac{1}{\cosh(\operatorname{argsinh} s)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ na $\mathbb{R}$ 3

Hledaná PF je tedy ($\lg : (0,+\infty)\to\mathbb{R}$): $\operatorname{argsinh}(1+\lg x)$ na $\mathbb{R}$ 1

3) $f(x)=\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3}$ a) $D(f)=[1,+\infty)$

11 $f(1)=\sqrt{8}$; $f(+\infty-) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{(x-1)^3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(3x^2+1)2}{\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{(x-1)^3}}$

$= +\infty$ 3

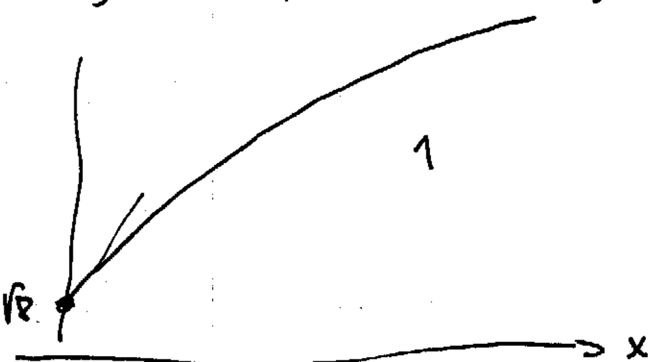
b) $x\in(1,+\infty)$: $f'(x)=\frac{3}{2}\left((x+1)^{1/2}-(x-1)^{1/2}\right)$; $f'_+(1)=f'(1+)=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 1

$f'(+\infty-) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{2}\,\dfrac{x+1-x+1}{(x+1)^{1/2}+(x-1)^{1/2}} = 0$ 1

$f'(x)>0$ na $(1,+\infty) \Rightarrow f$ je rostoucí na $D(f)$ 1 $\Rightarrow H(f)=[\sqrt{8},+\infty)$ 1

c) $x\in(1,+\infty)$: $f''(x)=\frac{3}{4}\left((x+1)^{-1/2}-(x-1)^{-1/2}\right) < 0$ pro $x>1$ a tedy

je f na $[1,+\infty)$ konkávní 2 ale:



4) 6

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^5 & ; x \le 1 \\ ax^2+bx+c & ; x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 5(1+x)^4 \\ 2ax+b \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} 20(1+x)^3 & x \le \cancel{0}\ 1 \\ 2a & x > 1 \end{cases}$$ 3

$\Rightarrow 2a = 20 \cdot 2^3 \Rightarrow a = 80$

$2a+b = 5 \cdot 2^4 \Rightarrow b = 80 - 160 = -80$

$a+b+c = 2^5 \Rightarrow c = 32 - a - b = 32$ 3

5) char. rce: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$

11 f.s: $e^{-2x}; x e^{-2x}$ 3

Řešení speciální: $y_0(x) = (Ax^2+Bx+C)e^x$

$y_0'(x) = e^x(2Ax + B + Ax^2 + Bx + C)$

$y_0''(x) = e^x(2A + 2Ax + B + 2Ax + B + Ax^2 + Bx + C)$ 3

$y_0''(x) + 4y_0'(x) + 4y_0(x) = e^x\big(x^2(A + 4A + 4A) + x(2A + 2A + B +$

$4\cdot(2A + B + B)) + (2A + 2B + C + 4B + 4C + 4C)\big) =$

$e^x(x^2 \cdot 9A + \cancel{x}(12A + 9B) + 2A + 6B + 9C)$

Chci! $e^x(x^2+2) \Rightarrow A = \frac{1}{9}, \; 9B = -\frac{12}{9} \Rightarrow B = -\frac{12}{81};$

$\cancel{\Rightarrow}$ $9C = 2 - \frac{2}{9} + \frac{6 \cdot 12}{81} = \frac{18 - 2 + 8}{9} = \frac{24}{9}; \; C = \frac{24}{81}$ 3

Hledané řešení tedy y: $\frac{1}{81}(9x^2 - 12x + 24)e^x + \alpha e^{-2x} + \beta x e^{-2x}$ 1

na $\mathbb{R}$ pro libb. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Jiný příklad 2)

$$P=\int \frac{1}{\sqrt{t^2+2t+2}}\,dt$$

Eulerova substituce:

$\sqrt{t^2+2t+2}=t+x$ 1

$\cancel{t^2}+2t+2=\cancel{t^2}+2tx+x^2$

$t(2-2x)=x^2-2$

$t=\frac{x^2-2}{2-2x}=\varphi(x)$ 1

$$\varphi'(x)=\frac{2x(2-2x)+2(x^2-2)}{(2-2x)^2}=\frac{-2x^2+4x-4}{(2-2x)^2}<0$$

$\Rightarrow \varphi$ je: ~~$(-\infty,1)\to\mathbb{R}$~~; $(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ na, protože:

$$t+x=\frac{x^2-2+2x-2x^2}{2-2x}=\frac{-x^2+2x-2}{2-2x}>0;\ x>1$$

$$\int\frac{2-2x}{-x^2+2x-2}\cdot\frac{-2x^2+4x-4}{(2-2x)^2}\,dx=\int\frac{2}{2-2x}\,dx=$$

$=-\lg|(1-x)|$ na $(1,+\infty)$ a $(-\infty,1)$ $-\lg(x-1)$

Vybereme $(1,+\infty)$ a dostaneme: ~~$\lg\frac{1}{1-x}$~~ na $(-\infty,1)$.

Hledaná PF je tedy: ~~$-\lg\left(1+t-\sqrt{t^2+2t+2}\right)=-\lg\left((t+1)-\sqrt{(t+1)^2+1}\right)$ na $\mathbb{R}$~~

$$-\lg\left(\sqrt{t^2+2t+2}-(t+1)\right)=-\lg\left(\sqrt{(t+1)^2+1}-(t+1)\right)=$$

$$=-\lg\frac{(t+1)^2+1-(t+1)^2}{\sqrt{(t+1)^2+1}+t+1}=\lg\left(\sqrt{(t+1)^2+1}+t+1\right)$$ 1 na $\mathbb{R}$

Srovnání s argsinh s: $\frac{1}{2}(e^s-e^{-s})=u;\ e^{2s}-2ue^s-1=0$

$\Rightarrow e^s=\frac{1}{2}\left(2u\pm\sqrt{4u^2+4}\right)=u\pm\sqrt{u^2+1}$ (− nelze); $s=\operatorname{argsinh}u=\lg\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)$ na $\mathbb{R}$