Zkoušková písemka, NMAF051, ZS 2012, varianta 2

Každý krok krátce a správně odůvodněte.

1. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin(x)}{\cos(x) - 1}.$$

2. Najděte primitivní funkci na maximálních intervalech
$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) + 3\sin(x) + 2}\mathrm{d}x.$$

3. Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) := \lg \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$
Studujte zejména: def. obor, spojitost, limity v krajních bodech, derivaci, její limity, monotonii, druhou derivaci, konvexitu, obor hodnot a načrtněte kvalifikovaný obrázek.

4. Najděte primitivní funkci k $f(x) = \min(1/2, \sin(x))$ na $(0, 2\pi)$ a spočtěte pomocí ní
$$\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

5. Najděte obecné řešení rovnice
$$y''(x) + y'(x) + y(x) = \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)e^{-\frac{x}{2}}.$$
Nezapomeňte na určení definičního oboru řešení.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - \sin x}{\cos x - 1} \overset{TP}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2) - 1 - (x+o(x^2))}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac12+\frac{o(x^2)}{x^2}}{-\frac12+\frac{o(x^2)}{x^2}} = -1$

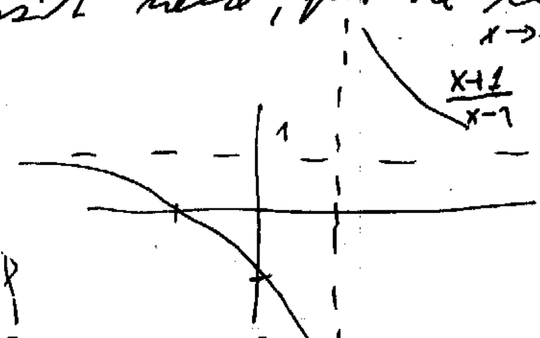
2) $\displaystyle\int \frac{1}{\underbrace{s^2+3s+2}_{(s+2)(s+1)}}\, ds = -\int \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1}\, ds = \lg \frac{|s+1|}{|s+2|}$

na $(-\infty,-2)$, $(-2,-1)$ a $(-1,+\infty)$ 3

$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ a $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ 3

$\Rightarrow$ Hledaná PF je $F(x) = \lg \dfrac{\sin x+1}{\sin x+2}$ na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 3

Na větší intervaly prodloužit nelze, protože $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} F(x) = -\infty$.



3) $f(x) = \frac12 \lg \dfrac{x+1}{x-1}$

$\Rightarrow D(f) = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

a f je zde spojitá — 3

složená ostře klesající fce.

navíc: f je ryze ~~ostře~~ klesající na $(-\infty,-1)$ a $(1,+\infty)$ a tedy

$H(f) = (-\infty,0) \cup (0,+\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

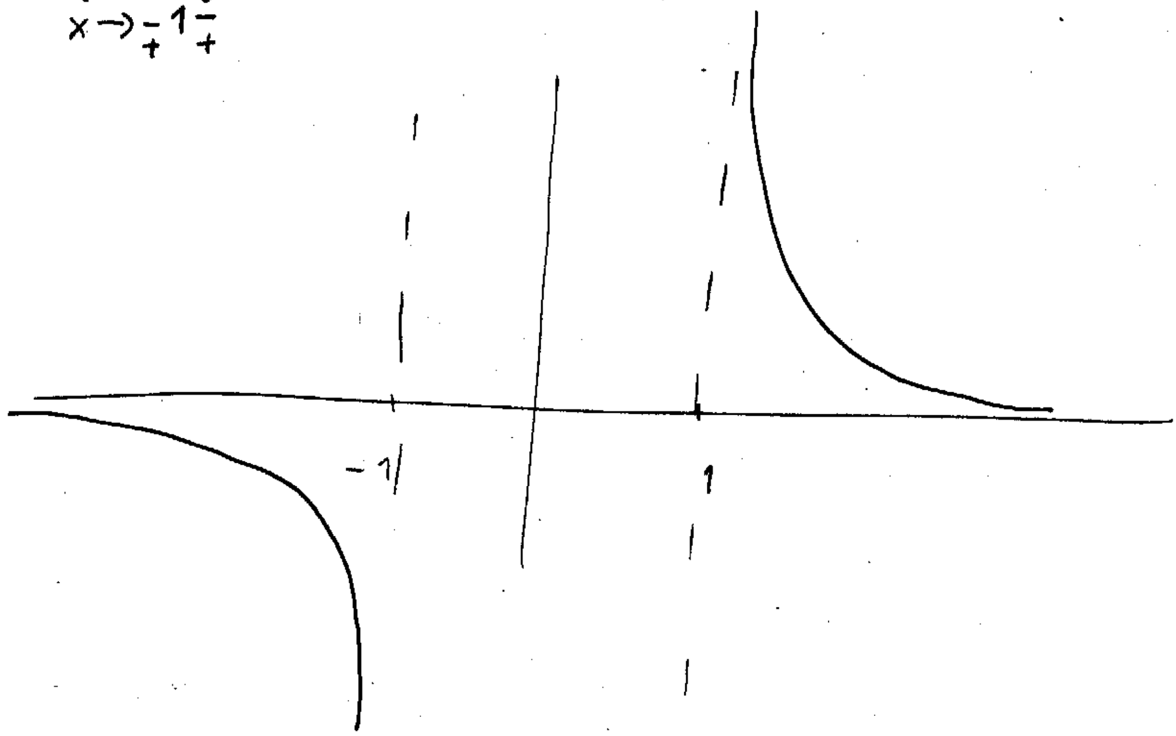
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to \pm 1\pm} f(x) = \pm\infty$

na $D(f)$: $f'(x) = \frac12 \dfrac{x-1}{x+1} \cdot \dfrac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \cancel{\dfrac{x-1}{(x+1)^3}}\ -\dfrac{1}{x^2-1} < 0$ na $D(f)$ a tedy

~~na $D(f)$: $f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^3} - \frac{(x-1)(-3)}{(x+1)^4} = \frac{3x-3-x-1}{(x+1)^4} = \frac{2x-4}{(x+1)^4}$~~ 3 na $\mathcal{D}(f)$: $f''(x) = + \dfrac{1}{(x^2-1)^2}\cdot 2x$

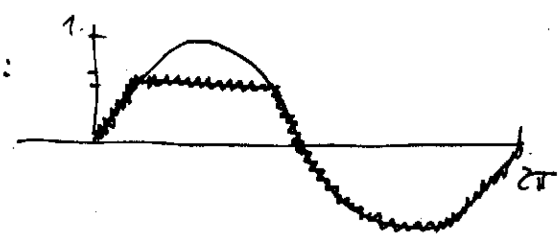
$\Rightarrow$ f konvexní na $(1,+\infty)$ a konkávní na $(-\infty,-1)$

$\lim\limits_{x\to \mp 1^{\mp}} f'(x) = -\infty$ — 3



2

4) Hledaná PF má tvar
$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + A & x\in (0,\frac{\pi}{6}) \\ \frac{x}{2} & x\in [\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi] \\ -\cos x + B & x\in (\frac{5\pi}{6},2\pi) \end{cases}$$

f: 

Konstanty A, B je třeba volit tak, aby F byla spojitá! Tedy

$$A = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \left(\frac{x}{2} + \cos x\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$B = \lim_{x\to\frac{5\pi}{6}} \left(\frac{x}{2} + \cos x\right) = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dohromady $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = [F]_0^{2\pi} = F(2\pi) - F(0) = \cancel{A+}B - A$

$= -\sqrt{3} + \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$

5) char. rovnice: $\lambda^2+\lambda+1=0 \iff \lambda_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$

$$= -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

f.s.: $e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right),\ e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right)$

Řešení s pravou stranou hledáme ve tvaru:

$$y_p(x) = \cancel{Ax}\,e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right) + \cancel{Bx}\,e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt3}{2}x$$

$$y_p'(x) = e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt3}{2}x\left(\cancel{A}+\cancel{Ax\left(-\frac12\right)}+\cancel{Bx\cdot\frac{\sqrt3}{2}}\right)+$$

$$e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt3}{2}x\left(\cancel{B}-\cancel{\frac{Bx}{2}}-\cancel{\frac{\sqrt3}{2}Ax}\right)$$

$$y_p''(x) = e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt3}{2}x\left(-\cancel{\frac{A}{2}}+\cancel{\frac{\sqrt3}{2}B}-\cancel{\frac12 A}+\cancel{\frac{Ax}{4}}-\cancel{\frac{\sqrt3 Bx}{4}}+\cancel{\frac{\sqrt3}{2}B}-\cancel{\frac{Bx\sqrt3}{4}}-\cancel{\frac34 Ax}\right)$$

$$e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt3}{2}x\left(-\cancel{\frac{B}{2}}-\frac{\sqrt3 A}{2}-\cancel{\frac12 B}+\cancel{\frac{Bx}{4}}+\cancel{\frac{\sqrt3}{4}Ax}-\frac{\sqrt3}{2}A+\cancel{\frac{\sqrt3}{4}Ax}-\cancel{\frac34 Bx}\right)$$

$$y_p''(x)+y_p'(x)+y_p(x) = \left(e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt3}{2}x\left(B\sqrt3\right)+e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt3}{2}x\left(-\sqrt3 A\right)\right)$$

$$\overset{\text{chci}}{=} \sin\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

Tedy: $A=-\dfrac{1}{\sqrt3}$; $B=0$

Obecné řešení problém na $\mathbb{R}$ je

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right)\left[\alpha\right]+\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right)\left[\beta-\frac{x}{\sqrt3}\right]\right)$$

pro lib. $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.