1. zkoušková písemka, NMAF051, ZS 2012

Každý krok krátce a správně odůvodněte.

1. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}(x)}{x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2(x)}}.$$

2. Najděte primitivní funkci na intervalu $(0, 3\pi)$
$$\int \frac{1}{3+\sin(x)+\cos(x)}\mathrm{d}x.$$

3. Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) := \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}.$$
Studujte zejména: def. obor, spojitost, limity v krajních bodech, derivaci, její limity, monotonii, konvexitu, obor hodnot a načrtněte kvalifikovaný obrázek.

4. Najděte $T^f_{0,3}$, je-li $f(x) = \frac{x^2+x}{x+2}$.

5. Najděte obecné řešení rovnice
$$y'' + 2y' + y = xe^{-x}.$$
Nezapomeňte na určení definičního oboru řešení.

1. kontrolní písemka – mma/OT1 – ás 2012

1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x} = L$

10

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\lg\frac{\operatorname{tg}x}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\lg\frac{\operatorname{tg}x}{x}}{\frac{\operatorname{tg}x}{x}-1}}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{tg}x - x}{x^3}}_{h(x)} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 x}}_{d(x)} = K$$

1 2

a) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$, protože $\frac{\operatorname{tg}x}{x} \to 1$ $x\to 0$; $\frac{\lg y}{y-1} \to 1$, $y \to 1$

a $\operatorname{tg} x \neq x$ na j. $P(0)$, viz b) 2

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}x - x}{x^3} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2} \overset{AL}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{3x^2} = \cancel{\ }$

aritmetika limit

$\overset{AL}{=} \frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{3}$ 2

c) $\lim\limits_{x\to 0} d(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot (\cos x)^2 = 1$ 1

Tedy $K = \frac{1}{3}$ dle aritmetiky limit a $L = \sqrt[3]{e}$, protože exp je spojitá v $\frac{1}{3}$. 2

2) $P = \int \frac{1}{3 + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}\,dx = \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} \frac{2}{\frac{3}{\cos^2\frac{x}{2}} + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\,dx$

10

$= \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} \frac{2}{3 + 3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\,dx$ dle 1. subst. věty $\varphi(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ 2

Máme spočítat: $\int \frac{2}{2t^2+2t+4}\,dt = \int \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\frac{1}{\frac{(t+\frac{1}{2})^2}{(\sqrt{\frac{7}{4}})^2}+1}\,dt$ 1

$= \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}}$ na $\mathbb{R}$. Hledaná PF je tedy 3 1

$F(x) := \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}$ na $(-\pi,\pi) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, protože $\operatorname{tg}\frac{x}{2} : (-\pi,\pi)+2k\pi \to \mathbb{R}$ a splňuje tedy pp. věty. 1

Hledaná PF je tedy

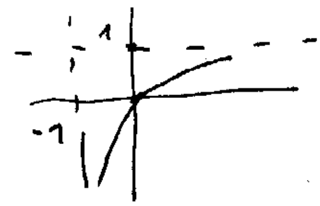
$$P(x) = \begin{cases} F(x) & x \in (0, \pi) \\ B & x = \pi \\ F(x) + A & x \in (\pi, 3\pi) \end{cases}$$

A, B jsou voleny tak, aby P bylo spojité, tedy

$B = \lim_{x \to \pi-} F(x) = \frac{\pi}{\sqrt{7}}$ a pro A platí $B = \frac{\pi}{\sqrt{7}} = \lim_{x \to \pi+} F + A =$

$= -\frac{\pi}{\sqrt{7}} + A$ a tedy $A = \frac{2\pi}{\sqrt{7}}$. 2

3) $f(x) = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$



12

$\mathcal{D}(f) = [0, +\infty)$ 1 ; protože $\frac{x}{x+1} \in [0, 1) \iff x \geq 0$

$f(+\infty-) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$; $f(0) = \arcsin 0 = 0$ 2

je f je spojitá na $\mathcal{D}(f)$ 1

$x \in \mathcal{D}(f) \setminus \{0\}$: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{x+1}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{(x+1)} > 0 \Rightarrow f$ je rostoucí na $\mathcal{D}(f)$ 2

Darbouxova vlastnost $\Rightarrow$ $\mathcal{H}(f) = [0, \frac{\pi}{2})$ 2

$x \in \mathcal{D}(f) \setminus \{0\}$:

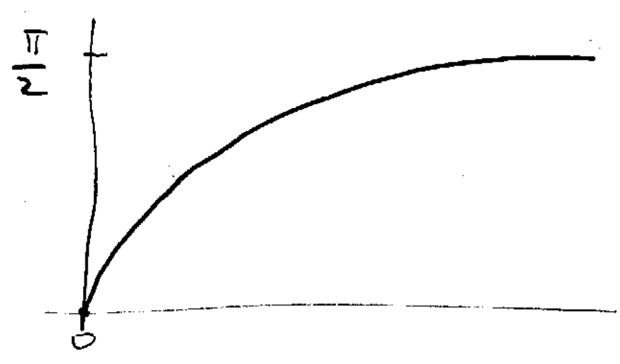
$f''(x) = -\frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) + \cancel{(x+1)} \cdot \sqrt{x}}{x(x+1)^2} = -\frac{1 \cdot \cancel{x+1}}{2 \cdot 2\sqrt{x}}(x+1+2x) < 0$ pro $x > 0$

$\Rightarrow f$ je konkávní na $\mathcal{D}(f)$ 2

$\left.\begin{array}{l} f'_+(0+) = +\infty \\ f'(+\infty-) = 0 \end{array}\right\}$ 1

obrázek:

1



4) Přibližme :

5 $$\frac{x+x^2}{2+x} = \frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+o(x^3), \text{ protože } \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{8}\frac{1}{2+x}\cdot\frac{1}{x^3}=0.$$ 1

$$x+x^2 \quad : 2+x = \frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{8}\cdot\frac{1}{2+x}$$

$$-\left(x+\frac{x^2}{2}\right)$$

3 (nebo se derivovat!)

$$\frac{x^2}{2}$$

$$-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}\right)$$

$$-\frac{x^3}{4}$$

$$-\left(-\frac{x^3}{4}-\frac{x^4}{8}\right)$$

$$\frac{x^4}{8}$$

Tedy: $T^f_{0,3}(x) = \frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}$ 1

5) char. rce: $\lambda^2+2\lambda+1=0 \iff \lambda=-1$ (dvojnásobný kořen) 2

8 f.s.: e^{-x}; xe^{-x} 1

Řešení s pravou stranou hledáme ve tvaru:

$$y_0(x) = (\underline{A}x^3+Bx^2)e^{-x}$$ 1

$$y_0'(x) = e^{-x}(3\underline{A}x^2+2\underline{B}x-\underline{A}x^3-\underline{B}x^2)$$

$$y_0''(x) = e^{-x}(6\underline{A}x+2B-3\underline{A}x^2-2\underline{B}x-3\underline{A}x^2-2\underline{B}x+\underline{A}x^3+\underline{B}x^2)$$ 1

$$y_0''(x)+2y_0'(x)+y_0(x) = e^{-x}\Big(x^3\underbrace{(A-2A+A)}_{=0}+x^2\underbrace{(-6A+6A+B-2B+B)}_{=0}$$

$$+x(6A\cancel{-2B}\cancel{-2B}\cancel{+4B})+(2B)\Big)$$ 1

Porovnáním $6A=1$; $2B=0$ tzn. $A=\frac{1}{6}$, $B=0$ 1

Obecné řešení má tedy tvar:

$$y(x) = \left(\frac{x^3}{6}+\alpha\right)e^{-x}+\beta x e^{-x} \text{ na } \mathbb{R} \text{ pro libovolné } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$ 1