3.9. Vztah monotónnosti a prostoty funkce

Zřejmě platí

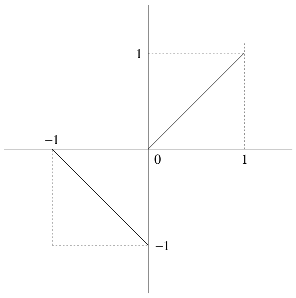
Věta 3.22. *Je-li f ryze monotónní na $M \subset \mathbb{R}$, pak je na M prostá.*

Následující příklad ukazuje, že opačné tvrzení obecně neplatí:

Příklad 3.28. Funkce

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \langle 0, 1), \\ -1 - x & x \in (-1, 0) \end{cases}$$

je prostá na $(-1, 1)$ i když tam není monotónní (ověřte). Její graf je na obrázku 3.7.



OBR. 3.7

Zajímavé je, že pro funkci spojitou na intervalu opak také platí:

Věta 3.23. *Je-li reálná funkce f spojitá na intervalu I, pak je na I prostá právě když je ryze monotónní.*

Důkaz této věty, který není tak úplně jednoduchý, zde neuvádíme.

3.10. Limita a spojitost inverzní funkce

V tomto oddílu dokážeme větu o limitách a spojitosti inverzní funkce, která se nám bude hodit při zkoumání důležitých příkladů dále.

K jejímu důkazu budeme potřebovat následující důležitou větu o *nabývání všech hodnot mezi dvěma danými hodnotami*, která platí pro reálné spojité funkce na intervalu.

Věta 3.24. *Je-li f spojitá reálná funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak na tomto intervalu nabývá všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.*

Důkaz. Pro $f(a) = f(b)$ je tvrzení zřejmé. Nechť je například $f(a) < f(b)$ a $c \in \langle f(a), f(b)\rangle$. Ukážeme, že $c \in f(\langle a, b\rangle)$. Označme $M_c = \{x;\ x \in \langle a, b\rangle,\ f(x) < c\}$. M_c je neprázdná ($a \in M_c$), zhora omezená (číslem b), a má tedy supremum $\alpha \in \langle a, b\rangle$. Existuje tedy posloupnost $x_n \in M_c$, $n \in \mathbb{N}$ taková, že $x_n \to \alpha \in \langle a, b\rangle$ pro $n \to \infty$. V důsledku spojitosti f pak podle Heineho věty $f(x_n) \to f(\alpha)$ pro $n \to \infty$. Protože je $f(x_n) < c$, je $f(\alpha) \le c$. Kdyby ale bylo $f(\alpha) < c$, pak by podle věty 3.10. bylo $f(x) < c$ pro $x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$. To je ale ve sporu s tím, že $\alpha = \sup M_c$. Je proto $f(\alpha) = c$.

Věta 3.25. *Nechť je f spojitá a rostoucí na intervalu I s koncovými body $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Potom platí*

1) *$\mathcal{R}_f$ je interval J s koncovými body $A = \inf\limits_{(a,b)} f = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$, $B = \sup\limits_{(a,b)} f = \lim\limits_{x\to b-} f(x)$. Tyto koncové body patří do $\mathcal{R}_f$ právě když patří do I příslušné koncové body a, b, přičemž patří-li a do I, je $A = \lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a) = \min\limits_{I} f(x)$, analogicky pro b.*
2) *f^{-1} je na J spojitá a rostoucí.*
3) *Platí*
$$\lim_{y\to A+} f^{-1}(y) = a,\ \lim_{y\to B-} f^{-1}(y) = b.$$

Analogická tvrzení platí pro f klesající s následujícími změnami: f^{-1} je klesající; $A = \inf\limits_{(a,b)} f = \lim\limits_{x\to b-} f(x)$, $B = \sup\limits_{(a,b)} f = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$; $\lim\limits_{y\to A+} f^{-1}(y) = b$, $\lim\limits_{y\to B-} f^{-1}(y) = a$.

Důkaz. Rovnosti $\inf\limits_{(a,b)} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$ apod. platí podle věty 3.19. resp. ze spojitosti f. 1) Je-li $I = (a, b)$ a $c \in (\inf\limits_{(a,b)} f, \sup\limits_{(a,b)} f) \overset{\text{def}}{=} \tilde{J}$, pak existují $x_1, x_2 \in I$, že $y_1 = f(x_1) < c < f(x_2) = y_2$. Podle věty 3.24. f nabývá na $\langle x_1, x_2\rangle$ všech hodnot mezi $f(x_1)$ a $f(x_2)$, a tedy i hodnoty c. Je tedy $\tilde{J} \subset J$. Je-li naopak $y_0 = f(x_0) \in J$, kde $x_0 \in (a, b)$, pak existuje $\tilde{x}$, $a < \tilde{x} < x_0$ a (protože f je rostoucí) $f(x_0) > f(\tilde{x}) \ge \inf\limits_{(a,b)} f(x)$; analogicky se dokáže $f(x_0) < \sup\limits_{(a,b)} f(x)$, tj.

$J \subset \tilde{J}$. V případě že I obsahuje některý ze svých koncových bodů, bude v $\mathcal{R}_f$ i obraz tohoto bodu, tj. příslušný krajní bod intervalu $\tilde{J}$.

2) *monotónnost*: kdyby existovaly $y_1 < y_2$, $y_1, y_2 \in J$ tak, že $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$, pak (díky tomu, že f je rostoucí) by bylo $y_1 = f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) = y_2$, což je spor s $y_1 < y_2$.

spojitost: ukážeme spojitost f^{-1} v každém bodě $y_0 \in J$, které není jeho pravým krajním bodem (analogicky by se provedl důkaz spojitosti zleva v každém bodě, který není levým krajním bodem J). Nechť tedy $y_0 = f(x_0)$ je takový bod. Potom x_0 není pravým koncovým bodem intervalu I. Zvolme $\varepsilon > 0$ tak malé, aby $x_0 + \varepsilon \in I$ a označme $y_\varepsilon = f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + \delta_\varepsilon = y_0 + \delta_\varepsilon$. Protože f^{-1} je rostoucí, je pro $y \in \langle y_0, y_0 + \delta_\varepsilon)$ $f^{-1}(y) \in \langle x_0, x_0 + \varepsilon)$, c.b.d.

3) plyne z 1) a 2) aplikovaných na funkci f^{-1}, která zobrazuje (A, B) na (a, b): krajní body $\mathcal{R}_{f^{-1}}$ jsou rovny limitám f^{-1} v krajních bodech intervalu (A,B).

Poznámka 3.19. I když je z obrázku, který si čtenář snadno nakreslí, věta skoro zřejmá, dal formální důkaz poměrně dost práce.

Rozeberme několik důležitých příkladů.

Příklad 3.29. Pro $k \in \mathbb{N}$ uvažme funkci $f(x) = x^{2k-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Tato funkce je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$, přičemž $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Tedy podle naší věty k ní existuje spojitá rostoucí inverzní funkce f^{-1}, definovaná na $\mathbb{R}$ a platí pro ni $\lim\limits_{y \to \pm\infty} f^{-1}(y) = \pm\infty$. Označujeme ji $\sqrt[2k-1]{y}$, nebo $y^{1/(2k-1)}$ ($(2k-1)$-ní odmocnina).

Příklad 3.30. Pro $k \in \mathbb{N}$ uvažme funkci $f(x) = x^{2k}$, $x \in \langle 0, \infty)$. f je spojitá a rostoucí na $\mathcal{D}_f$ a je $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Zobrazuje proto interval $\langle 0, +\infty)$ na interval $\langle 0, +\infty)$, a existuje k ní spojitá a rostoucí inverzní funkce f^{-1}, definovaná na $\mathcal{R}_f = \langle 0, +\infty)$, přičemž je $\lim\limits_{y \to +\infty} f^{-1}(y) = +\infty$. Označujeme ji $\sqrt[2k]{y}$ nebo $y^{1/2k}$ ($(2k)$-tá odmocnina).

Poznámka 3.20. K funkci $g(x) = x^{2k}$, $x \in \mathbb{R}$ neexistuje inverzní, neboť f není prostá. Kdybychom vzali její zúžení $\tilde{g}$ na interval $(-\infty, 0\rangle$, pak k $\tilde{g}$ existuje inverzní $(\tilde{g})^{-1}$, která zobrazuje interval $\langle 0, +\infty)$ na interval