Příklady na 12. týden

Limity funkcí l'Hospitalovým pravidlem a pomocí Taylorova polynomu

Následující limity lze spočítat pomocí obou metod. Vyzkoušejte to a srovnejte jejich náročnost.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3}$
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2}$
4. $\lim_{x\to 0^+} x^x$
5. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$
6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$
7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$
8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^3}$

Taylorův polynom

(a) Napište Taylorův polynom funkce $f(x) = e^{2x-x^2}$ stupně 3 v bodě 0.

(b) Napište Taylorův polynom funkce $f(x) = \sqrt{x}$ stupně 3 v bodě 1.

(c) Spočtěte přibližně $\sqrt[5]{250}$.

(d) Spočtěte přibližně $\arcsin 0,45$.

(e) Energie volné částice je v teorii relativity dána vztahem $E = mc^2 = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Ukažte, že pro $v \ll c$ představuje veličina $T = E - m_0c^2$ kinetickou energii newtonovské mechaniky.

Symboly O, o, $\sim$, $\cong$

Dokažte platnost následujících tvrzení

(f) $\operatorname{arctg} x = O(1)$, $x \to \infty$

(g) $x^2e^{-x} = o(x^a)$, $x \to \infty$, $a < 0$

(h) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} = O(\sqrt[8]{x})$, $x \to 0^+$

(i) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \cong \sqrt{x}$, $x \to \infty$

Najděte reálné a, tak aby platilo

(j) $\dfrac{1+x}{1+x^4} \sim x^a$, $x \to \infty$

(k) $e^x - \cos x \sim x^a$, $x \to 0$.

Limita posloupnosti

Vypočítejte

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6 - 6n^5 + 2} + \sqrt[5]{n^7 + n^3 + 1}}$

(m) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$, $a \in R$

(n) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

(o) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$

(p) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, kde $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$, $n \geq 1$

(q) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + \dfrac{1}{a_n})$, $n \geq 1$

(r) Zjistěte, pro která x existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx$.

Najděte $\limsup\limits_{n\to\infty}$ a $\liminf\limits_{n\to\infty}$

(s) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1} \cos \dfrac{2}{3} n\pi$

(t) $a_n = n(2 + (-1)^n)$

(u) $a_n = \cos^n \dfrac{2}{3} n\pi$

Najděte hromadné body následujících posloupností

(v) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{7}{8}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}, \dfrac{2^n - 1}{2^n}, \ldots$

(w) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, \ldots$