

Lokální a globální extrémy funkcí

Nalezněte lokální extrémy funkcí

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

2. $f(x) = e^x \sin x$

3. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$

Dokažte následující nerovnosti

4. $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$, $x, y > 0$, $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Youngova nerovnost)

5. $e^x > x + 1$, $x \neq 0$

6. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

má v bodě 0 ostré lokální minimum a funkce

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

nemá v bodě 0 lokální extrém, přestože platí $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0$, $n = 1, 2, \dots$

7. Nalezněte globální extrémy funkce $f(x) = x^2 - 4x + 6$ na intervalu $[-3, 10]$.

8. Nalezněte supremum a infimum funkce $f(x) = xe^{-0.01x}$ na intervalu $(0, \infty)$.

9. Nádobu naplněnou vodou se svislou stěnou výšky h stojí na vodorovné rovině. Vypočítejte výšku otvoru nádoby nad vodorovnou rovinou tak, aby voda stříkala co nejdále.

10. Mezi dvěma svislými tyčemi, jejichž vzdálenost je d , je upevněna za konce niť délky l . Rozdíl výšek upevnění je h . Po niti může volně klouzat hmotný bod. Najděte rovnovážnou polohu bodu za podmínky, že potenciální energie má být minimální.

Monotónie funkcí

11. Nalezněte intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x^n e^{-x}$, $n \in \mathbb{N}$, rostoucí a klesající.
12. Pro atomové teplo prvku platí

$$C_v = 3R \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2},$$

kde $x = \frac{T^*}{T}$, T je absolutní teplota v Kelvinech, T^* je tzv. charakteristická teplota a R je plynová konstanta. Dokažte, že atomové teplo prvku je rostoucí funkce teploty.

Konvexita, konkávnost

Nalezněte intervaly, kde je funkce konvexní/konkávni, a najděte inflexní body

13. $f(x) = e^{-x^2}$
14. $f(x) = x \sin \ln x$
15. Dokažte nerovnost $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$, $x, y > 0$, $x \neq y$, $n > 1$ a vysvětlete její geometrický význam.

Průběh funkcí

Vyšetřujte průběh následujících funkcí

16. $f(x) = 3x - x^3$

$$17. f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$18. f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$$

$$19. f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}$$

$$20. f(x) = e^{-2x} \sin^2 x$$

$$21. f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1}$$