6. zkoušková písemka, NMAF051, ZS 2009

Každý krok krátce a správně odůvodněte.

1. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x-2}-\sqrt[3]{x^2+x-11}}{\sin(\frac{2x\pi}{3})}.$$

2. Najděte na maximálních intervalech
$$\int \frac{1}{\sin(x)+4}\mathrm{d}x.$$

3. Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) = \sqrt[3]{(x+3)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}.$$
Studujte zejména: def. obor, spojitost, limity v krajních bodech, derivaci, její limity, monotonii, obor hodnot, druhou derivaci, konvexitu a načrtněte kvalifikovaný obrázek.

4. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin(x)+\sqrt{x}+\operatorname{arctg}(x)}{x^2+\cos(x)+6}.$$

5. Najděte obecné řešení $y(x)$ na maximálních intervalech
$$y''(x) - y(x) = \exp(x).$$

Reparační písemka 1. 9. 2010 – nmaf051

1) $$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt[3]{x^2+x-11}}{\sin\left(\frac{2x\pi}{3}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-2)^3 - (x^2+x-11)^2}{(\sqrt{x-2})^5 + (\sqrt{x-2})^4 \sqrt[3]{x^2+x-11} + \dots + \sqrt{x-2}\left(\sqrt[3]{x^2+x-11}\right)^4 + \left(\sqrt[3]{x^2+x-11}\right)^5}$$

$$\cdot \frac{2\pi\left(\frac{x}{3}-1\right)}{\sin\left(2\pi\left(\frac{x}{3}-1\right)\right)} \cdot \frac{1}{2\pi\left(\frac{x}{3}-1\right)}$$

$$\overset{AL}{=} \lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 3x^2\cdot 2 + 3x\cdot 4 - 8 - (x^4 + x^2 + 121 + 2x^3 - 22x - 22x^2)}{6 \cdot 2\pi \frac{(x-3)}{3}}$$

protože $\frac{\sin y}{y} \to 1$ pro $y \to 0$ a $2\pi\left(\frac{x}{3}-1\right) \to 0$ pro $x \to 3$ a je prosté

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-x^4 - x^3 + 15x^2 + 34x - 129}{4\pi(x-3)}$$

Čitatel musí být dělitelný $x-3$: ok: $-81 - 27 + 135 + 102 - 129$
$= 237 - 237 = 0$ ✓

⇒ lze použít l'H

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-4x^3 - 3x^2 + 30x + 34}{4\pi} = \frac{-4\cdot 27 - 3\cdot 9 + 90 + 34}{4\pi} =$$

$$\frac{-108 - 27 + 90 + 34}{4\pi} = \frac{124 - 135}{4\pi} = -\frac{11}{4\pi}$$

2)

$$I = \int \frac{1}{\sin x + 4}\, dx = \int \frac{1}{2 \sin x/2 \cos \frac{x}{2} + 4}\, dx =$$

$$= \int \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{2}{\cos^2 \frac{x}{2}}}\, dx = \int \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)}\, dx$$

$x \neq 2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

Hledáme PF na $(-\pi, \pi)$: substituce $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \varphi(x)$

$\varphi : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$

Chceme najít PF na $\mathbb{R}$: $\displaystyle\int \frac{1}{2t^2 + t + 2}\, dt = \int \frac{1}{2\left(t^2 + \frac{t}{2} + 1\right)}\, dt =$

$$= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}\, dt = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{1}{\left(\frac{4t+1}{\sqrt{15}}\right)^2 + 1}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{4t+1}{\sqrt{15}} \quad \text{na } \mathbb{R}$$

$\Rightarrow F = \dfrac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \dfrac{4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{15}}$ na $(-\pi, \pi)$ je PF na $(-\pi, \pi)$

$$PF = \begin{cases} F(x) + k \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{na } (-\pi, \pi) + 2k\pi \\ \frac{2}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\pi}{2} + k \frac{2\pi}{\sqrt{15}} & \text{v } (\pi + 2k\pi) \end{cases} \Bigg\}\ \text{je PF na } \mathbb{R}.$$

3) $f(x) = \sqrt[3]{(x+3)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a f je všude spojitá

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, protože

$f(x) = 6\cdot g'(\xi)$ pro j. $\xi \in (x-3, x+3)$

a $g(y) = \sqrt[3]{y^2}$

dále: $|g'(\xi)| = \left|\frac{2}{3}\cdot y^{-\frac{1}{3}}\Big|_{y=\xi}\right| \le \frac{2}{3}(x-3)^{-1/3} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

pro $|x|$ dost. velké

podobně pro $x\to-\infty$

pro $x\neq\pm3$: $f'(x) = \frac{2}{3}(x+3)^{-1/3} - \frac{2}{3}(x-3)^{-1/3}$

ze spojitosti f: $f'_+(3) = \lim\limits_{x\to3+} f'(x) = -\infty$

podobně $f'_-(3) = +\infty$; $f'_\pm(-3) = \pm\infty$

Kde je $f'=0$? $(x+3)^{-1/3} = (x-3)^{-1/3} \Rightarrow$ žádné x neex.

	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
f		↘	↗	↘
f'		$-$	$+$	$-$

Dohromady: $\mathcal{H}(f) = [f(-3), f(3)] = [-\sqrt[3]{36}, \sqrt[3]{36}]$

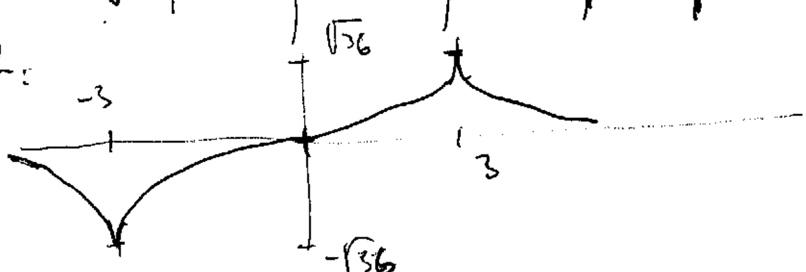
pro $x\neq\pm3$: $f''(x) = -\frac{2}{9}\left((x+3)^{-4/3} - (x-3)^{-4/3}\right)$

Kdy je $f''(x)=0$? $(x+3)^{-4/3} = (x-3)^{-4/3} \Rightarrow |x+3| = |x-3| \Rightarrow x=0$

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
f''		$-$	$-$	$+$	$+$

$\Rightarrow$ f je konvex. na $(0,3)$ a $(3,+\infty)$
konkávní na $(-\infty,-3)$ a $(-3,0)$

Gr:



4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x+\sqrt{x}+\operatorname{arctg} x}{x^2+\cos x+6} = 0$ protože

$$\frac{\sin x+\sqrt{x}+\operatorname{arctg} x}{x^2+\cos x+6} \le \frac{\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1+\frac{\pi}{2\sqrt{x}}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^2}\right)} \xrightarrow{AL} 0$$

$$\ge \frac{\sqrt{x}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}+1+\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}+6\right)} \xrightarrow{AL} 0$$

5) $y''-y=e^x$; $\lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm 1$

$FS = e^x, e^{-x}$

partikulární řešení má tvar: $e^x(Ax)=y_P$

$$y_P'(x)=e^x(Ax+A)$$
$$y_P''(x)=e^x(Ax+A+A)$$

$y_P''-y_P=e^x 2A \Rightarrow A=1/2$

Maximální řešení mají tvar: $y_M(x)=\frac{1}{2}xe^x+\alpha e^x+\beta e^{-x}$ na $\mathbb{R}$

kde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.