3. zápočtová písemka – NMAF051 – 2009

① Najděte primitivní funkci na maximálních intervalech.

$$\int x^3 \lg(x^2)\,dx$$

② Najděte primitivní funkci na maximálních intervalech

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx$$

③ Najděte PF na $(0,1)$. Použijte 2. substituční metodu a substituci při $\varphi(t)=\sqrt{\dfrac{t^2}{t^2+1}}$.

$$\cancel{\int \frac{t^3}{(1-t^2)^3}\,dt} \qquad \int \frac{x^3}{(1-x^2)^3}\,dx$$

Pokud budete používat nějaké věty, ověřte předpoklady.

ad 1) $\displaystyle\int x^3 \lg(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\cdot x^2 \lg x^2\,dx = I$

Podle 1. věty o subst. přejde

$$\int y \lg y\,dy = \frac{y^2}{2}\lg y - \int \frac{y}{2}\,dy = \frac{y^2}{4}(2\lg y - 1)$$

$$\underset{\frac{y^2}{2}}{\downarrow\int} \qquad \underset{\frac{1}{y}}{\downarrow d}$$

na $(0,+\infty)$.

Tedy $I = \dfrac{1}{2}\dfrac{x^4}{4}\left(2\cdot\lg(x^2)-1\right)$ na $(-\infty,0)$ a $(0,+\infty)$.

ad 2) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx = \int e^x \,\frac{e^x}{(e^x)^2+2e^x+1}\,dx = I$

Stačí počítat podle 1 VoSubst.

$$\int \frac{y}{y^2+2y+1}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{2y+2}{y^2+2y+1}\,dy + (-1)\int \frac{1}{(y+1)^2}\,dy =$$

$$\frac{1}{2}\lg|y^2+2y+1| + (y+1)^{-1} \text{ na } (-\infty,-1) \text{ a } \underline{\underline{(-1,+\infty)}}$$

Tedy $(e^x: \mathbb{R} \to (0,+\infty))$

$$I = \frac{1}{2}\lg(e^{2x}+2e^x+1) + \frac{1}{e^x+1} \quad \text{na } \mathbb{R}$$

ad 3) Substituční fce $\varphi(t) = \sqrt{\dfrac{t^2}{t^2+1}}$

$$\forall t \neq 0: \varphi'(t) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\dfrac{t^2}{t^2+1}}}\cdot\frac{2t(t^2+1)-2t^3}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}\cdot\frac{2t}{(t^2+1)^2}$$

Tedy φ je rostoucí na $(0,+\infty)$ a klesající na $(-\infty,0)$

$\varphi: (0,+\infty) \xrightarrow{na} (0,1)$. Pro nalezení PF na $(0,1)$ stačí nalézt

$$\int \sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}\cdot\frac{t}{(t^2+1)^2}\cdot\left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)^{3/2}\cdot\frac{1}{\left(1-\dfrac{t^2}{t^2+1}\right)^3}\,dt =$$

$$\int \sqrt{\frac{\cancel{t^3+1}}{t^2}}\cdot\frac{t}{\cancel{(t^2+1)^2}}\cdot\frac{t^3}{\cancel{(t^2+1)^{3/2}}}\cdot\frac{\cancel{(t^2+1)^3}}{1}\,dt = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} \quad \text{na } \mathbb{R}$$

spec. na $(0,+\infty)$. Spočtěme φ^{-1}: $\varphi(t) = x \iff \dfrac{t^2}{t^2+1} = x^2 \iff t^2 = x^2t^2 + x^2$

$\iff t^2 = \dfrac{x^2}{1-x^2} \iff t = \sqrt{\dfrac{x^2}{1-x^2}}$ Řešení tedy je

$$I = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)^2 \quad \text{na } (0,1).$$