

2. zápočtová písemka, NMAF051, ZS 2009

1. Spočtete limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + x \exp(x))}{\lg(2x + \sqrt{1 + x^2})} \sin(x)$.
2. Spočtete limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 8)^{\frac{1}{3}} - (x + 4)^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{tg}(x)}$.
3. Buď $h : (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$ libovolná funkce (s hodnotami v intervalu $(-1, 1)$). Spočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + x^2 h(x))}{x}$.

Pokud používáte nějaké Věty zmiňte to a ověřte jejich předpoklady.

Príklad 2. sa početné pravidlá - strana 057

1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x \exp x)}{\ln(2x+\sqrt{1+x^2})} \cdot \sin x =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x \exp x)}{x \cdot \exp x} \cdot \frac{2x+\sqrt{1+x^2}-1}{\ln(2x+\sqrt{1+x^2})} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^2 \cdot \exp x}{2x+\sqrt{1+x^2}-1} =$$

→ 1 dle l'Hôpitala
sl. fe

→ 1 (sl. fe)

májin': $\frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$ při $x \rightarrow 0$

májin': $\frac{x}{\ln(1+x)} \rightarrow 1$ při $x \rightarrow 0$

májin': $x \cdot \exp x \rightarrow 0$ při $x \rightarrow 0$
 $x \cdot \exp x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

májin': $2x+\sqrt{1+x^2}-1 \rightarrow 0$
při $x \rightarrow 0$

$$2x + \sqrt{1+x^2} = 1 \Leftrightarrow (2x)^2 + 4x + 1 = 1 + x^2$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ nebo } x = \frac{4}{3}$$

Tedy je $P(0, \frac{4}{3})$ bod, ve kterém má $f(x) = 0$!

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x+\sqrt{1+x^2}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{4x^2+4x\sqrt{1+x^2}-1} \cdot (2x+\sqrt{1+x^2}+1)$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{4x+4\sqrt{1+x^2}+x^2} = 0$$

Pomocí pravidel věty o aritmetice

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+x^2 \cdot l(x))}{x+x^2 \cdot l(x)} \cdot (1+x \cdot l(x)) = 1$

→ 1

→ 1 podle věty

dle věty o l'Hôpitala

$x \rightarrow 0$

$|l(x)|$ omezen

$$|x+x^2 l(x)| = |x(1+x l(x))|$$

$$\geq |x|(1-|x| \cdot |l(x)|) > 0$$

při $|x| < 1$

platí $|l(x)| \leq 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+8)^{\frac{1}{3}} - (x+5)^{\frac{1}{2}}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1/x} \cdot \frac{(x+8)^{\frac{1}{3}} - (x+5)^{\frac{1}{2}}}{x(A^5 + A^4B + \dots + B^5)}$$

smacne $A = (x+8)^{\frac{1}{3}}, B = (x+5)^{\frac{1}{2}}$

a unizeno nrec $(A^6 - B^6) = (A - B)(A^5 + A^4B + \dots + AB^5 + B^5)$

$$= \frac{1}{6 \cdot 2^5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 16x + 65 - (x^3 + 12x^2 + 3 \cdot 16x + 65)}{x} =$$

aritmetički limit

$$\begin{aligned} A &\rightarrow 2 \\ B &\rightarrow 2 \text{ pri } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6 \cdot 2^5} \cdot x + 16 - (x^2 + 12x + 3 \cdot 16) = \frac{-2 \cdot 2^7}{6 \cdot 2^5} = -\frac{1}{6}$$

Pomni! veť a aritmetičko limit je r pordku.