3. zkoušková písemka, NMAF051, ZS 2009

Každý krok krátce a správně odůvodněte.

1. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2\arcsin^2(x)} - \cos^2(x)}{x^2}.$$

2. Najděte na maximálních intervalech

$$\int \frac{1}{x} \frac{\lg^2(x)}{[\lg^2(x)+1][\lg(x)+1]}.$$

3. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}} \exp(-x^2).$$

Studujte zejména: def. obor, spojitost, limity v krajních bodech, derivaci, její limity, monotonii, obor hodnot a načrtněte kvalifikovaný obrázek.

4. Najděte obecné řešení $y = y(x)$ na maximálním intervalu

$$y'' + 2y' + y = 1.$$

5. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 2^{\sin(x)}}{x^3}.$$

3. zkušební písemka, nmaf 051, ZS 2009 8:42 – 9:12

① $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2\arcsin^2 x} - \cos^2 x}{x^2} \overset{2}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1+2\arcsin^2 x - \cos^4 x}{x^2\left(\sqrt{1+2\arcsin^2 x}+\cos^2 x\right)}$$

$$\overset{AL\,2}{=} \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0} 2\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 + \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)(1+\cos^2 x)}{x^2}\right)$$

$$\overset{AL}{=} \frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\right) \overset{2}{=} 2 \quad \text{protože } \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\text{a } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$ 2

② $$\int \frac{1}{x}\,\frac{\lg^2 x}{(\lg^2 x+1)(\lg x+1)}\,dx = \left|\begin{matrix} 1.\ \text{věta} \\ \varphi(x) = \lg x \\ \varphi'(x) = \frac{1}{x}\end{matrix}\ \middle|\ \varphi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}\right| = PF$$ 2

Přitom $$\int \frac{y^2}{(y^2+1)(y+1)}\,dy = \int \frac{Ay+B}{y^2+1} + \frac{C}{y+1}\,dy,$$

kde $y^2 = (Ay+B)(y+1) + C(y^2+1)$

$y=-1: \quad 1 = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

$y=0: \quad B + C = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

$y^2: \quad 1 = A + C \Rightarrow A = +\frac{1}{2}.$ 2

Tedy: $$\int +\frac{1}{2}\,\frac{y-1}{y^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{y+1}\,dy = \frac{1}{2}\lg|y+1| - \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\lg(y^2+1) + \operatorname{arctg} y\right)$$ na $(-\infty,-1)$ a $(-1,+\infty)$. 2

~~Tedy(PF) = $\frac{1}{2}\lg\frac{|y+1|}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} y$ na $(0,e^{-1})$ a $(e^{-1},+\infty)$ protože: $\varphi : (0,e^{-1}) \xrightarrow{na} (-\infty,-1)$ a $(e^{-1},+\infty)$~~

Tedy(PF) $$= \frac{1}{2}\lg\frac{|\lg x+1|}{\left(\sqrt{\lg^2 x+1}\right)^{-1}} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\lg x \text{ na } (0,e^{-1}) \text{ a } (e^{-1},+\infty)$$

protože $\varphi : (0,e^{-1}) \xrightarrow{na} (-\infty,-1)$ a $(e^{-1},+\infty) \xrightarrow{na} (-1,+\infty)$. 2

Tedy (PF) $= \frac{1}{2}\lg|\lg x+1|\cdot\sqrt{\lg^2 x+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\lg x$ na —//—

(3)

$$f(x) = (x+1)^{1/3} \exp(-x^2)$$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, spojitá, není sudá ani lichá

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ 2

pro $x \neq -1$: $f'(x) = e^{-x^2}\left(\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3} + (x+1)^{1/3} \cdot (-2x)\right) =$

$$\frac{e^{-x^2}}{3(x+1)^{+2/3}}\left(1 + 3(x+1)(-2x)\right) =$$

$$\frac{e^{-x^2}}{3(x+1)^{+2/3}}\left(-6x^2 - 6x + 1\right)$$ 2

nulové body derivace: $x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36+24}}{-12} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{60}}{12}$

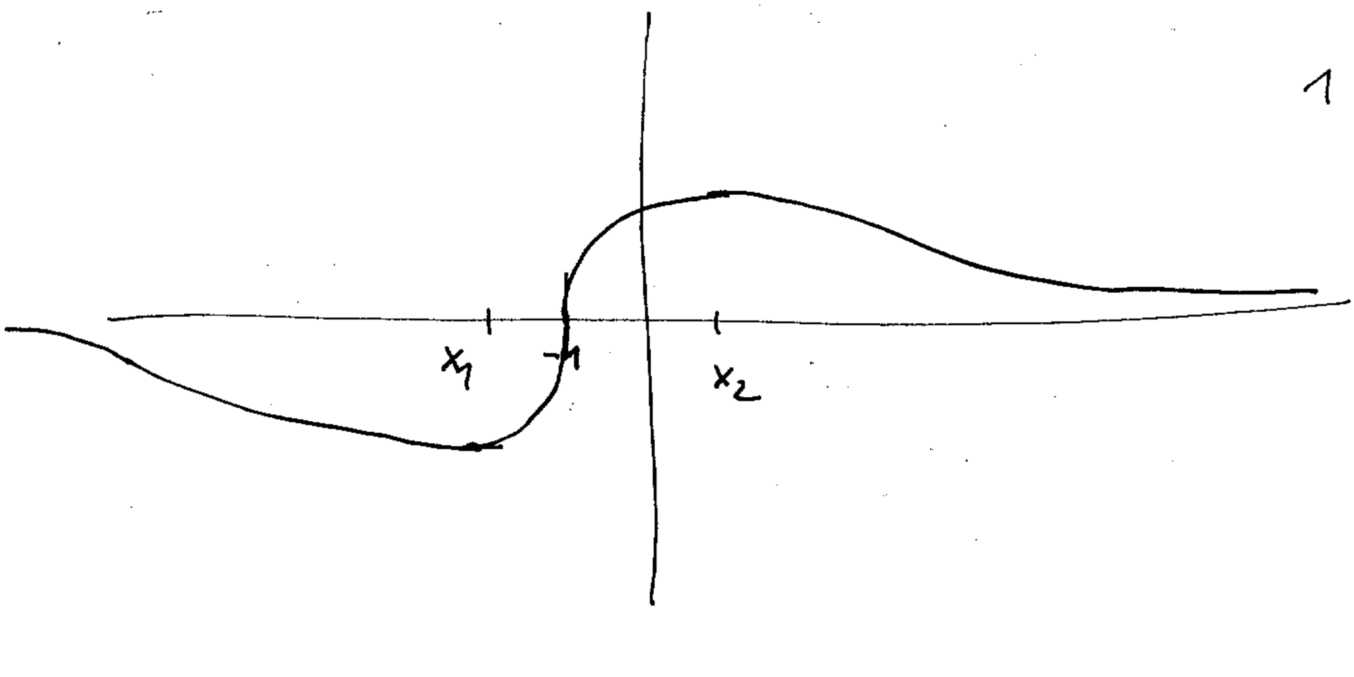
značme: $x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{60}}{12}$, $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{60}}{12}$. Platí: $\sqrt{60} > 6$

Tedy $-\infty < x_1 < -1 < x_2 < +\infty$

f roste na $[x_1, -1]$, $[-1, x_2]$; klesá na $(-\infty, x_1]$, $[x_2, +\infty)$ 2 $f'(-1) = \lim\limits_{x \to -1} f'(x) = +\infty$ 1

$\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. Tedy $\mathcal{H}(f) = [f(x_1), f(x_2)]$ 1

1



(4) $y'' + 2y' + y = 1$

char. rce: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow$ f.s.: e^{-x}; $x \cdot e^{-x}$ 2

$(\lambda+1)^2 = 0$

OŘ: $Ae^{-x} + Bxe^{-x}$ 1

Variace konstant:

$A'(x)e^{-x} + B'(x)xe^{-x} = 0$

$-A'(x)e^{-x} + B'(x)e^{-x} + B'(x)(-xe^{-x}) = 1$

$1 = B'e^{-x} \Rightarrow B'(x) = e^{x} \Rightarrow B(x) = e^{x} + B$

$A'(x) \cdot e^{-x} = -B'(x)xe^{-x} = -x \Rightarrow A'(x) = -xe^{x}$

$A(x) = -\int x e^{x}\,dx = -(xe^{x} - e^{x})$ na $\mathbb{R}$

$\downarrow 1$ $\int$

1 e^{x}

2

Tedy konečné řešení: $-(xe^{x} - e^{x} + A) \cdot e^{-x} +$ ~~[illegible]~~ $(e^{x}+B)x \cdot e^{-x} =$

$= 1 + Ae^{-x} + Bxe^{-x}$ na $\mathbb{R}$ $\forall A, B \in \mathbb{R}$. 2

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{x} - 2^{\sin x}}{x^3} \overset{}{\underset{1}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{\sin x}(2^{x-\sin x} - 1)}{x^3} \overset{AL}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{\exp((x-\sin x)\cdot \lg 2) - 1}{(x-\sin x)\lg 2}}_{1} \cdot \dfrac{(x-\sin x)\lg 2}{x^3} \overset{AL}{=}$

$\to 1$ dle věty o lim sl. fce

vnitřní $x - \sin x \to 0$ pro $x \to 0$

1 $x - \sin x = \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ pro $x \to 0$

tedy $\neq 0$ na j. $P(0)$

2

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} \cdot \lg 2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} \cdot \lg 2 = \dfrac{\lg 2}{6}$ 2

Taylorův polynom 2