2. zkoušková písemka, NMAF051, ZS 2009

Každý krok krátce a správně odůvodněte.

1. Určete $\beta \in \mathbf{N}$ tak, aby limita byla konečná a nenulová a spočtěte ji.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(\mathrm{tg}(x)) - \exp(\mathrm{arctg}(x))}{\sin^{\beta}(x)}$$

2. Najděte na maximálních intervalech

$$\int \frac{\lg(x)}{(x+1)^3} \mathrm{d}x.$$

3. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{arctg}(\lg(|x|)), & x \neq 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

   Studujte zejména: def. obor, spojitost, limity v krajních bodech, derivaci, její limity, monotonii, obor hodnot, druhou derivaci, konvexitu a načrtněte kvalifikovaný obrázek.

4. Najděte primitivní funkci na intervalu $(-1, 1)$

$$\int |x| \cos(x) \mathrm{d}x.$$

5. Všude kde existuje spočtěte derivaci (případně jednostranné, nebo limity derivací)

$$f(x) = (x+2)^2 \sqrt{|x^2 - 2|}.$$

2. zkoušková písemka, nmaf051, zs 2009

(1) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{\operatorname{arctg} x}}{\sin^{\beta} x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x} - 1}{x^{\beta}} \cdot \overbrace{\frac{x^{\beta}}{\sin^{\beta} x}}^{1} \cdot \overbrace{e^{\operatorname{arctg} x}}^{1} =$$

$$\overset{AL}{=} \lim_{x\to 0} \overbrace{\frac{e^{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x} - 1}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}}^{1} \cdot \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}{x^{\beta}} = L$$

Věta o lim. sl. fce: vnitřní $\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x \to 0$ pro $x \to 0$

Dle Lagr. věty: $\operatorname{tg}(x) - \operatorname{arctg} x = x \cdot (\operatorname{tg}'\xi - \operatorname{arctg}'\xi) \neq 0$ protože

$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ pro nějaké $\xi \in (0, x)$ 3

$$\operatorname{tg}'\xi = \frac{1}{\operatorname{arctg}'(\operatorname{tg}\xi)} = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\xi + 1}} > 1$$

$$\operatorname{arctg}'\xi = \frac{1}{\xi^2 + 1} < 1$$

$$L \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{1+x^2}}{\beta x^{\beta - 1}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1 + x^2 - \cos^2 x}{\beta x^{\beta-1}} \overset{AL}{=}$$

$$\frac{1}{\beta}\left[\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^{\beta-1}} + \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^{\beta-1}} \cdot (1 + \cos x)\right] \underset{\beta = 3}{=} \frac{1}{3}(1 + 1) = \frac{2}{3}$$ 4

(2) $$\int \frac{\lg x}{(x+1)^3}\,dx = \left(-\frac{\lg x}{2(x+1)^2}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$ 2

d: $\frac{1}{x}$ $\qquad \int$: $\frac{(x+1)^{-2}}{-2}$ 2

Parciální zlomky:

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$ 3

$$1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

$x = 0$: $A = 1$

$x = -1$: $C = -1$

x^2: $0 = A + B \Rightarrow B = -1$

$$\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \lg\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1}$$ 2

Výsledek: $PF = \frac{-1}{2}\frac{\lg x}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\lg\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$ na $(0, +\infty)$ 1

(3) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\lg|x|) & x \neq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0 \end{cases}$

$D(f) = \mathbb{R}$, spojitá, sudá, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \cancel{+\infty}\ \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to 0\pm} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ 2

$x \neq 0:\ f'(x) = \frac{1}{\lg^2|x|+1} \cdot \frac{1}{x}$; $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$ 1

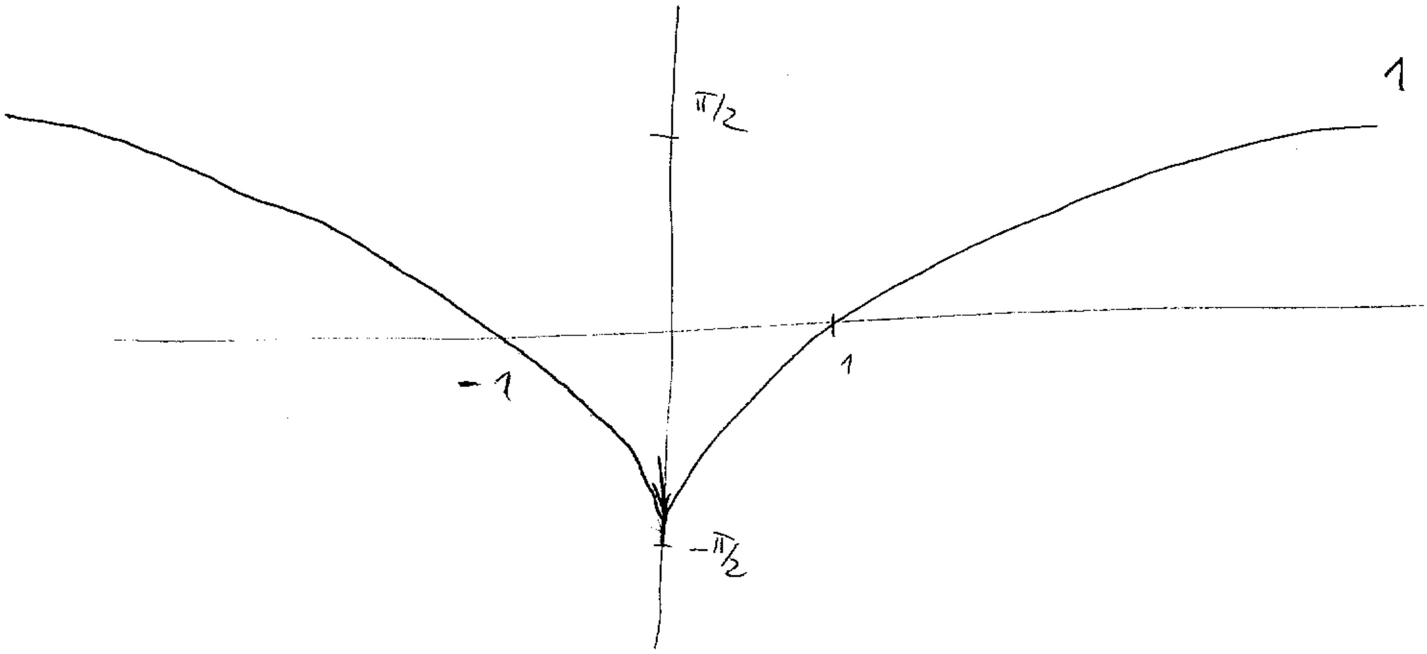
$\lim_{x\to 0\pm} f'(x) = \pm\infty = f'_{\pm}(0)$ protože f je v 0 spojitá 1

$\Rightarrow$ f je rostoucí na $[0,+\infty)$ a klesající na $(-\infty, 0]$, $H(f) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 2

$x \neq 0:\ f''(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\lg^2|x|+1} + \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{(\lg^2|x|+1)^2} \cdot \frac{(2\lg|x|)}{x} =$ 1

$-\frac{1}{(\lg^2|x|+1)^2} \frac{1}{x^2} \underbrace{\left(\lg^2|x| + 1 + 2\lg|x|\right)}_{(\lg|x|+1)^2} \leq 0$ všude kde ex. 1

$\Rightarrow$ f konkávní (všude), f konkávní na $(-\infty, 0]$ a $[0,+\infty)$ 1



(4)

$$\int |x| \cos x \, dx = PF$$

Začneme: $\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x$ na $\mathbb{R}$ 1

$\downarrow d \quad \downarrow i$

$1 \quad \sin x$

$$PF = \begin{cases} x \sin x + \cos x + A & x > 0 \\ 0 & \\ -x \sin x - \cos x + B & x < 0 \end{cases}$$ 3

a A je vhodná konst, aby $\lim\limits_{x \to 0+} PF = 0$

B $\lim\limits_{x \to 0-} PF = 0$

Tedy $A = -\cos 0 = -1$

$B = \cos 0 = 1$

Pak je PF spojitá v 0 a platí $(PF)'(0) = 0$ 1

(5)

$$f(x) = (x+2)^2 \sqrt{|x^2-2|}$$

Kde můžu derivovat? Mimo body, kde $x^2 - 2 = 0$.

dle vzorců

$x \neq \pm\sqrt{2}$: $f'(x) = 2(x+2) \cdot \sqrt{|x^2-2|} + (x+2)^2 \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sgn}(x^2-2)}{\sqrt{|x^2-2|}} \cdot 2x$

1 2

protože f je spojitá 1

$\lim\limits_{x \to \sqrt{2}\pm} f'(x) = \pm\infty = f'_{\pm}(\sqrt{2})$

$\lim\limits_{x \to -\sqrt{2}\pm} f'(x) = \pm\infty = f'_{\pm}(-\sqrt{2})$ 1