1. zkoušková písemka, NMAF051, ZS 2009

Každý krok krátce a správně odůvodněte.

1. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2(1-\cos(x))}{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

2. Najděte na maximálních intervalech
$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+e^x+3}}\mathrm{d}x.$$

3. Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) := \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{x+1}}.$$
Studujte zejména: def. obor, spojitost, limity v krajních bodech, derivaci, její limity, monotonii, obor hodnot a načrtněte kvalifikovaný obrázek.

4. Najděte $T^{\sin x}_{\frac{\pi}{2},2}$ a spočtěte s jeho pomocí
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)-1}{(x-\frac{\pi}{2})^\alpha}$$
pro $\alpha \in \mathbf{N}$, pro která existuje.

5. Určete, pro která $\lambda = \mu^2 \in (0,+\infty)$ existuje netriviální řešení problému
$$y'' + \lambda y = 0$$
na intervalu $(0, 2\pi)$ s okrajovou podmínkou $y(0) = y(2\pi) = 0$ a najděte ho.

Zkušební písemka 18.1.2010 - nmaf051

1 $\boxed{9}$ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2(\cos x-1)}{-x^2}\right)^{\frac{1}{x}} \overset{1}{=} \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x}\lg\left(\frac{2(\cos x-1)}{-x^2}\right)\right)=L$

Spočteme $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\lg\frac{2(1-\cos x)}{x^2} \overset{1}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\lg\left(\frac{2(1-\cos x)}{x^2}\right)}{\frac{2(1-\cos x)}{x^2}-1}$ $\longrightarrow 1$

$\cdot\ \frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^3} \overset{AL}{=}$

$\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^3} =$

$= \lim_{x\to 0}\frac{2\left(1-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)-x^2}{x^3}+o(x) = 0$ 3

3 $\Bigg\{$ používáme limitu složené funkce, protože $\frac{2(1-\cos x)}{x^2}\to 1$ a $\frac{2(1-\cos x)}{x^2}-1 \neq$ ~~...~~ a tedy ex. $P(0)$: $\frac{2(1-\cos x)}{x^2}\neq 1$

Tedy $L=1$, protože exp je spojitá v 0. 1

2 $\boxed{8}$ $\int\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+e^x+3}}\,dx = PF$

1. věta o substituci: $\varphi(x)=e^x$, $\varphi: \mathbb{R}\to(0,+\infty)$ $\Big\}$ 2

spočteme: $\int\frac{1}{\sqrt{y^2+y+3}}\,dy = \int\frac{1}{\sqrt{(y+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}}}\,dy = \int\frac{1}{\sqrt{\frac{11}{4}\left(\left(\frac{y+1/2}{\sqrt{\frac{11}{4}}}\right)^2+1\right)}}\,dy$

$= \operatorname{argsinh}\frac{2y+1}{\sqrt{11}}$ na $\mathbb{R}$ 2

Proto: $(\operatorname{argsinh} z)' = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{argsinh} z)} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{argsinh} z)} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ na $\mathbb{R}$. 2

Tedy $PF = \operatorname{argsinh}\frac{2e^x+1}{\sqrt{11}}$ na $\mathbb{R}$ 2

Pokud použiji Eulerovy substituce, tak 4 body za výpočet

(3) $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{x+1}}$

$\boxed{10}$

$D(f)$: $(x \geq 0 \;\&\; x+1 > 0) \vee (x \leq 0 \;\&\; x+1 < 0)$

$x > -1 \qquad\qquad x < -1$

$[0,+\infty) \cup (-\infty,-1)$

$D(f) = (-\infty,-1) \cup [0,+\infty)$ a f je zde spojitá   1+1

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$, $\lim_{x\to -1-} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = f(0) = 0$ 2

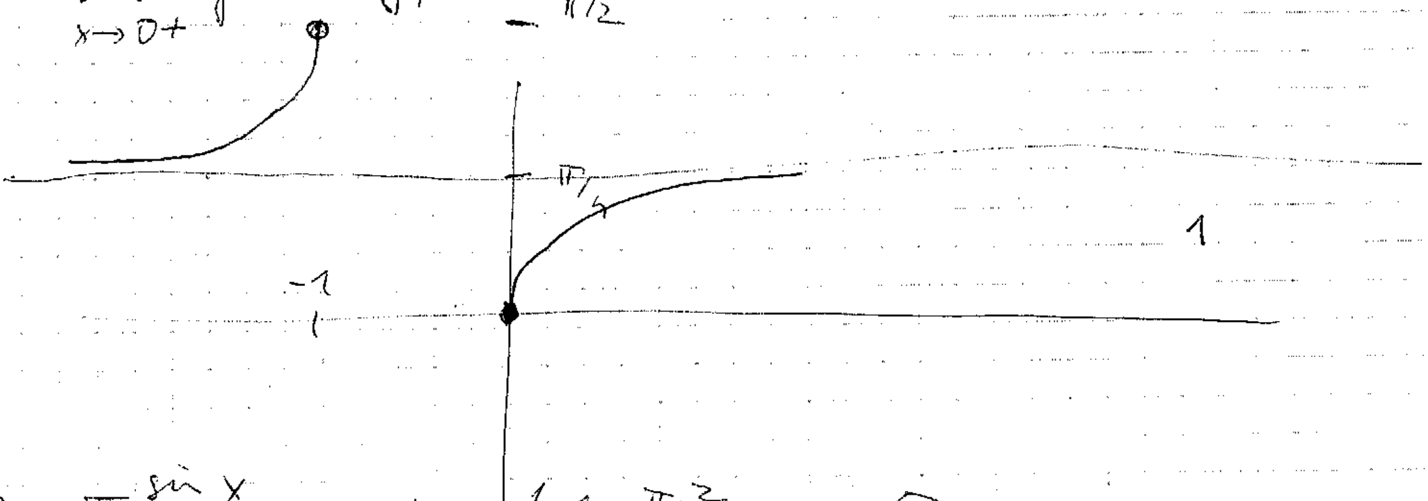
$x \in D(f)\setminus\{0\}$: $f'(x) = \frac{1}{1+\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-1/2} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} > 0$ 2

$\Rightarrow$ f rostoucí na $(-\infty,-1)$ a $([0,+\infty))$ 1

$H(f) = \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right) \cup [0, \cancel{+\infty}\ \frac{\pi}{4})$ 1

$\lim_{x\to -1-} f'(x) = \lim_{x\to -1-} \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$

$\lim_{x\to 0+} f'(x) = f'_+(0) = +\infty$ 1



1

(4) $T^{\sin x}_{\frac{\pi}{2},2}(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2$ (3)

$\boxed{6}$

$f(x) = \sin x$; $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$

v $\frac{\pi}{2}$: $1 \qquad 0 \qquad -1$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 - 1 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \alpha = 2 \\ 0 & \alpha = 1 \\ -\infty & \alpha \text{ sud} \end{cases}$$

(5) $\lambda = \mu^2$: $y'' + \lambda y = 0$

[4] char. rovnice: $s^2 + \mu^2 = 0$ má kořeny $\pm \mu i$ (2)

fundamentální systém: $\sin \mu x, \cos \mu x$

obecné řešení: $y_0(x) = A \sin \mu(x) + B \cos \mu x \quad \forall A, B \in \mathbb{R}$ (1)

okrajové podm.: $0 = B$

$0 = A \sin(\mu 2\pi)$

$\iff (A = 0) \vee (2\pi \mu = \pi k)$ (2)

$A = 0$ není zajímavé (chceme netriv. řešení)

$\mu = \frac{k}{2}$ pro $k \in \mathbb{N}$:

Tedy hledaná λ mají tvar $\frac{k^2}{4}$ pro $k \in \mathbb{N}$ a příslušná řešení jsou $\sin \frac{kx}{2}$. (2)