

9. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \text{ je racionální} \\ 0 & x \text{ je iracionální.} \end{cases}$$

má derivaci pouze v nule.

10. Ukažte, že derivace sudé funkce je funkce lichá.

11. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ ax + b & x > 1. \end{cases}$$

Určete a , b tak, aby $f(x)$ měla v bodě 1 derivaci.

12. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ v bodě $[-2, ?]$ grafu.

Elementární funkce

Dokažte, že

13. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

14. $\operatorname{arcsin} x + \operatorname{arccos} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$

15. $\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$

16. $\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $|x| \geq 1$

17. $\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$

18. $\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$, $|x| > 1$

Derivace

19. Dokažte vztahy pro derivace cyklometrických, hyperbolických a hyperbolometrických funkcí.

Vypočtěte derivace následujících funkcí v libovolném bodě x , kde derivace existuje:

20. $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$
21. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$
22. $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$
23. $f(x) = \sin \sin \sin x$
24. $f(x) = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$
25. $f(x) = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$
26. $f(x) = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$
27. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$
28. $f(x) = x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x$
29. $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$.